Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 30

Es gelte

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{m} \operatorname{div}\left(A^{ij}(x)\nabla u_j\right) = 0, \quad i = 1,\dots,m$$

im klassischen Sinn auf $\Omega\backslash\{x_0\}$.
Multipliziere $(*)$ mit $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega\backslash\{x_0\}$ und integriere partiell:

$$(**) \qquad \int_\Omega \sum_{j=1}^{m} (\nabla\varphi)^T A^{ij}(x)\nabla u_j \, dx = 0, \quad (i = 1,\dots,m)$$

Wollen zeigen: $(**)$ gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sei dazu $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(x) = 1$ für $x \in [-1,1]$, $\eta(x) = 0$ für $|x| > 2$ und $0 \le \eta \le 1$ in $\mathbb{R}$. Für $\varepsilon > 0$ definiere $\eta_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.
Für $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ setze $\varphi_\varepsilon(x) := (1 - \eta_\varepsilon(x - x_0))\,\varphi(x)$. Es folgt $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \Omega\backslash\{x_0\}$ und somit gilt $(**)$ für φ_ε. Es bleibt zu zeigen: $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$.
Es gilt: $\nabla\varphi_\varepsilon(x) = -(\nabla\eta_\varepsilon)(x - x_0)\varphi(x) + (1 - \eta_\varepsilon(x - x_0))\nabla\varphi(x)$ und somit

$$\begin{aligned} &\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi_\varepsilon(x) = (\nabla\eta_\varepsilon)(x - x_0)\varphi(x) + \eta_\varepsilon(x - x_0)\nabla\varphi(x) \\ \Rightarrow \quad &\|\nabla\varphi - \nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^2} \le \|(\nabla\eta_\varepsilon)(\cdot - x_0)\varphi\|_{L^2} + \|\eta_\varepsilon(\cdot - x_0)\nabla\varphi\|_{L^2} \end{aligned}$$

Betrachte die Terme auf der rechten Seite:

$$\|\eta_\varepsilon(\cdot - x_0)\nabla\varphi\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \left|\eta\left(\frac{|x - x_0|}{\varepsilon}\right)\right|^2 |\nabla\varphi|^2 \, dx \le \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} |\nabla\varphi|^2 \, dx \to 0 \ (\varepsilon \to 0) \quad \text{da } \nabla\varphi \in L^2(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \|(\nabla\eta_\varepsilon)(\cdot - x_0)\varphi\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \left|\frac{1}{\varepsilon}\eta'\left(\frac{|x - x_0|}{\varepsilon}\right)\frac{x - x_0}{|x - x_0|}\right|^2 |\varphi|^2 \, dx \le \frac{1}{\varepsilon^2}\|\eta'\|_\infty \|\varphi\|_\infty \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} 1 \, dx \\ &= \frac{C(2\varepsilon)^n}{\varepsilon^2} = C\varepsilon^{n-2} \to 0 \ (\varepsilon \to 0) \quad \text{da } n \ge 3 \end{aligned}$$

Es folgt $\|\nabla\varphi_\varepsilon - \nabla\varphi\|_{L^2} \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ und mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt: $(**)$ gilt für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Aufgabe 31

Da $|u_j| \sim |x|^{-\gamma+1}$, folgt $|\nabla u_j| \sim |x|^{-\gamma}$ $(j = 1,\dots,n)$. Es genügt also zu zeigen: $|x|^{-\gamma} \in L^2(B_1(0))$. Wegen $\int_{B_1(0)} |x|^\alpha \, dx < \infty \iff \alpha > -n$ ist dies erfüllt, falls $-2\gamma > -n$.

Es gilt: $2\gamma < n \iff 1 - ((2n-2)^2+1)^{-1/2} < 1 \iff 0 < (2n-2)^2+1$, also folgt $u \in (H^1(B_1(0)))^n$.
Wir zeigen nun: Das System von Euler-Lagrange-Gleichungen aus Aufgabe 30 lässt sich in der Divergenzform von Aufgabe 31 schreiben.
Wähle Matrix $A^{ij} = \left(a_{kl}^{ij}\right)_{k,l=1\ldots,n}$ mit Einträgen

$$a_{kl}^{ij} = 2\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\left((n-2)\delta_{jl} + n\frac{x_j x_l}{|x|^2}\right)\left((n-2)\delta_{ik} + n\frac{x_i x_k}{|x|^2}\right).$$

Dann folgt für $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \operatorname{div}(A^{ij}(x)\nabla u_j) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^n a_{kl}^{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j,l=1}^n \left[2\delta_{ij}\delta_{kl}\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + 2\left((n-2)\delta_{jl} + n\frac{x_j x_l}{|x|^2}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\left((n-2)\delta_{ik} + n\frac{x_i x_k}{|x|^2}\right)\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\left(2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sum_{l,j=1}^n 2\left((n-2)\delta_{jl} + n\frac{x_j x_l}{|x|^2}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\left((n-2)\delta_{ik} + n\frac{x_i x_k}{|x|^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Vergleich mit Aufgabe 30 b) zeigt, dass dies die Euler-Lagrange-Gleichungen des dortigen Problems sind.
Man kann nun nachrechnen, dass $u(x) = \frac{x}{|x|^\gamma}$ die Euler-Lagrange-Gleichungen im klassischen Sinn auf $B_1(0)\backslash\{0\}$ löst. Mit Aufgabe 31 folgt: u ist schwache Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen.
Beachte: Für $n \geq 3$ gilt: $((2n-2)^2+1)^{-1/2} \leq \frac{1}{4}$ und somit $\gamma \geq \frac{n}{2}(1-\frac{1}{4}) = \frac{3n}{8}$. Nochmal $n \geq 3$ verwenden zeigt $\gamma > 1$, also ist u tatsächlich unbeschränkt.

Aufgabe 32

a) Setze $I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ und $V := \left\{v \in H_0^1(\Omega):\ G(v) := \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\,dx = 1\right\}$. Nach Vorlesung gilt: I besitzt einen Minimierer $u_0 \in V$ und es existiert ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $I'(u_0) = \lambda G'(u_0)$, d.h. es gilt $-\Delta u_0 = \lambda |u_0|^{p-1}u_0$ im schwachen Sinn. Testen der Gleichung mit $u_0 \neq 0$ liefert

$$\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} = \lambda \|u_0\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}$$

und wir erhalten $\lambda > 0$. Für die Funktion $u := \lambda^{\frac{1}{p-1}} u_0$ gilt dann $u \in H_0^1(\Omega)$ und

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega$$

b) Wähle nun

$$I(u) = \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left((\nabla u)^T A(x)\nabla u + V(x)u^2\right)\,dx$$

und

$$V = \left\{v \in H_0^1(\Omega):\ G(v) := \frac{1}{p+1}\int_\Omega \Gamma(x)|v|^{p+1}\,dx = 1\right\}.$$

Beachte, dass $V \neq \emptyset$ aufgrund der Voraussetzungen an Γ.