Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
11. Übungsblatt

Aufgabe 34

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres beschränktes Gebiet und $K \subset H_0^1(\Omega)$ abgeschlossen und konvex. Weiter sei $A \in L^\infty(\Omega)^{n,n}$ eine gleichmäßig positiv definite Matrix und $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c(x) \geq c_0 > 0$. Betrachten Sie das Funktional

$$I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R},\ u \mapsto \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}(\nabla u)^T A(x) \nabla u(x) + \tfrac{1}{2} c(x) u^2 - f(x) u\right]\, dx.$$

a) Bestimmen Sie Konstanten $B, C > 0$, so dass $I(u) \geq B\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C$. Beweisen Sie, dass I auf der Menge K einen Minimierer u_0 besitzt.

b) Finden Sie eine variationelle Ungleichung für u_0.

c) Bestimmen Sie einen Radius $R > 0$ ($R = R(B, C)$) mit der Eigenschaft:

$$\{v \in H_0^1(\Omega) :\ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} < R\} \subset K \quad \Longrightarrow \quad u_0 \in K^\circ$$

Welche verschärfte variationelle Ungleichung erfüllt u_0 in diesem Fall?

Aufgabe 35

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I(u) = \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - f(x) u\right]\, dx$$

auf der Menge $V := \{v \in H_0^1(\Omega) :\ |\nabla v| \leq 1 \text{ fast überall in } \Omega\}$ einen eindeutigen Minimierer besitzt.
Beweisen Sie außerdem, dass u_0 die folgende variationelle Ungleichung erfüllt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u)\, dx \geq \int_\Omega f(x)(v - u)\, dx \quad \text{für alle } v \in V$$

Besprechung in der Übung am 22.1.2014