Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 34

a) Nach Voraussetzung existiert $\lambda > 0$ mit $\xi^T A(x)\xi > \lambda|\xi|^2$ für fast alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Es folgt für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{c_0}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{c_0}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\overset{\varepsilon=\frac{c_0}{2}}{=} \underbrace{\frac{\lambda}{2}}_{=:B}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \underbrace{\frac{1}{2c_0}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}}_{=:C} \end{aligned}$$

Das Funktional ist also koerziv auf $H_0^1(\Omega)$ und insbesondere existiert $m := \inf_{u\in K} I(u)$. Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $I(u_k) \to m$ eine minimierende Folge. Aus der Koerzivität von I folgt nun die Beschränktheit von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $H_0^1(\Omega)$ und somit die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $u_{k_j} \to u_0$ $(j \to \infty)$. Aufgrund der kompakten Einbettung von $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ folgt $u_{k_j} \to u_0$ in $L^2(\Omega)$ und da Ω beschränkt ist, auch $u_{k_j} \to u_0$ in $L^1(\Omega)$.

Wollen nun zeigen: I schwach unterhalbstetig.

Da $\left(\int_\Omega (\nabla u)^T A(x)\nabla u\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$ auf $H_0^1(\Omega)$ eine zu $\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$ äquivalente Norm ist, ist $u \mapsto \int_\Omega (\nabla u)^T A(x)\nabla u\, dx$ schwach unterhalbstetig. Die L^2- bzw. L^1-Konvergenz liefert $u \mapsto \int_\Omega \left[\frac{1}{2}c(x)u^2 - f(x)u\right]\, dx$ ist stetig. Insgesamt folgt die schwache Unterhalbstetigkeit von I.

Damit folgt

$$I(u_0) = I(\lim(u_{k_j})) \leq \liminf_{j\to\infty} I(u_{k_j}) = m = \inf_{u\in K} I(u).$$

Es bleibt noch zu zeigen: $u_0 \in K$. Wir beweisen: K abgeschlossen und konvex, so folgt K schwach abgeschlossen.

Sei $(v_k) \subset K$ mit $v_k \rightharpoonup v$ in $H_0^1(\Omega)$. Angenommen v wäre nicht in K, dann gibt es nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach (s. z.B. Werner, Funktionalanalysis, Satz III.2.5) ein Element $w \in H_0^1(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$\langle w, v\rangle_{H_0^1} + \varepsilon \leq \langle w, z\rangle_{H_0^1} \quad \text{für alle } z \in K$$

Setze $z = v_k$ und betrachte den Grenzübergang $k \to \infty$. Dann gilt:

$$\langle w, v\rangle_{H_0^1} + \varepsilon \leq \langle w, v\rangle_{H_0^1}$$

also $\varepsilon \leq 0$, Widerspruch! Somit folgt $u_0 \in K$.

b) Sei nun $u_0 \in K$ ein Minimierer von I auf K und $v \in K$ beliebig. Aufgrund der Konvexität von K gilt: $u_0 + t(v - u_0) \in K$ für alle $t \in [0,1]$ und folglich:

$$I(u_0 + t(v - u_0)) \geq I(u_0) \quad \text{für alle } v \in K \text{ und } t \in [0,1]$$

Sei $v \in K$ fest; wie in der Vorlesung folgt $l(t) := I(u_0 + t(v - u_0))$ besitzt ein Minimum bei $t = 0$ und somit (Definition nur für $t \in [0,1]$): $l'(0) \geq 0$. Dies führt auf die Ungleichung:

$$\int_\Omega \left[(\nabla u)^T A(x)(\nabla v - \nabla u_0) + c(x)(v - u_0)\right]\, dx \geq \int_\Omega f(x)(v - u_0)\, dx \quad \text{für alle } v \in K$$

c) Wähle $R > \sqrt{\frac{C}{B}}$. Angenommen, die Kugel $\{v \in H_0^1(\Omega) : \ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} < R\}$ liegt in K (insbesondere gilt dann $0 \in K$. In diesem Fall gilt für alle $v \in \partial K$: $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} > R$ und somit

$$I(v) \geq BR^2 - C > 0 = I(0)$$

Also kann I sein Minimum nicht auf dem Rand von K annehmen und es folgt $u_0 \in K^\circ$. Ist $w \in H_0^1(\Omega)$, so gilt nun sogar $I(u_0 + t(w - u_0)) \geq I(u_0)$ für alle $t \in (-\varepsilon, 1)$ mit $\varepsilon = \varepsilon(w)$ (da $u_0 \in K^\circ$) und somit für $l(t) = I(u_0 + t(w - u_0))$: $l'(0) = 0$. Dies führt auf

$$\int_\Omega \left[(\nabla u_0)^T A(x)\nabla w + c(x)u_0 w\right]\, dx = \int_\Omega f(x) w\, dx \quad \text{für alle } w \in H_0^1(\Omega)$$

Also ist u_0 schwache Lösung von $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \frac{1}{2}c(x)u = f(x)$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $u_0 \in K^\circ$.

Aufgabe 35

I ist koerziv:

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \|u\|_{H_0^1}^2 - \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\
&\geq \|u\|_{H_0^1}^2 - C_P\|f\|_{L^2}\|u\|_{H_0^1} \\
&\geq \|u\|_{H_0^1}^2 - \varepsilon C_P\|u\|_{H_0^1}^2 - \tfrac{1}{4\varepsilon} C_P\|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2C_p}$.
Es sei $(u_n) \subset V$ eine minimierende Folge, d.h. $I(u_n) \to \inf_{v\in V} I(v)$. Aufgrund der Koerzivität ist (u_n) beschränkt in $H_0^1(\Omega)$ und besitzt eine in $H_0^1(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge $u_{n_j} \rightharpoonup u$. Außerdem gilt $u_{n_j} \to u$ in $L^2(\Omega)$. Es folgt:

$$I(u) \leq \liminf_{j\to\infty} I(u_{n_j}) = \inf_{v\in V} I(v)$$

Es bleibt zu zeigen: $u \in V$

Angenommen, $u \notin V$. Dann existiert eine Menge $A \subset \Omega$ positiven Maßes und $\delta > 0$ mit $|\nabla u| \geq 1 + \delta$ f.ü. in A. Aus $u_{n_j} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ folgt $\nabla u_{n_j} \rightharpoonup \nabla u$ in $(L^2(\Omega))^n$ (Beweis am Ende der Aufgabe). Zusammen mit $(u_{n_j}) \subset V$ folgt:

$$\int_\Omega |\psi| \, dx \geq \int_\Omega \nabla u_{n_j} \cdot \psi \, dx \to \int_\Omega \nabla u \cdot \psi \, dx \quad \text{für alle } \psi \in (L^2(\Omega))^n.$$

Setze $\psi = \nabla u \cdot \chi_A$. Dann gilt:

$$\int_A |\nabla u| \, dx = \int_\Omega |\psi| \, dx \geq \int_\Omega \nabla u \cdot \psi \, dx = \int_A |\nabla u|^2 \, dx \geq (1+\delta) \int_A |\nabla u| \, dx$$

Widerspruch!
Alternativ kann man zeigen, dass die Menge V konvex und abgeschlossen ist, d.h. nach Aufgabe 31 schwach abgeschlossen.
Eindeutigkeit des Minimieres: Setze $I_1(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \, dx$, $I_2(u) = \int_\Omega f(x) u \, dx$. Seien $u_1, u_2 \in V$ zwei Minimierer (insb. $I(u_1) = I(u_2)$) und $v := \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$. Wie in der Vorlesung (Beweis von Satz VII.3) können wir mit Hilfe von Taylor zeigen:

$$I_1(v) + \tfrac{1}{8} \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \, dx \leq \tfrac{1}{2}(I_1(u_1) + I_1(u_2))$$

Addiere auf beiden Seiten $I_2(v)$. Mit $I(v) = I_1(v) + I_2(v)$ und $\frac{1}{2}I_1(u_1) + \frac{1}{2}I_1(u_2) + I_2(v) = \frac{1}{2}(I_1(u_1) + I_2(u_1) + I_1(u_2) + I_2(u_2)) = \frac{1}{2}(I(u_1) + I(u_2)) = I(u_1)$ folgt

$$\underbrace{I(v)}_{\geq \min_V I} + \tfrac{1}{8} \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \, dx \leq I(u_1) = \min_V I.$$

Also $\nabla u_1 = \nabla u_2$ f.ü. in Ω und wegen $u \in H_0^1(\Omega)$ folgt $u_1 = u_2$.
Die variationelle Ungleichung beweist man wie in der vorherigen Aufgabe (V konvex).

Behauptung: Sei $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$. Dann folgt $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ in $(L^2(\Omega))^n$.
Beweis: Es sei $\xi \in (L^2(\Omega))^n$ beliebig. Durch die Definition

$$(\operatorname{div} \xi)[\varphi] := \int_\Omega -\nabla \varphi \cdot \xi \, dx = \langle -\nabla \varphi, \xi \rangle_{L^2} \quad \text{für } \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

können wir ξ als Element in $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ auffassen. Nach dem Satz von Riesz existiert ein $\eta \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$(\operatorname{div} \xi)[\varphi] = \langle \varphi, \eta \rangle_{H_0^1} \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Es folgt:

$$\langle \nabla u_k, \xi \rangle_{L^2} = -(\operatorname{div} \xi)[u_k] = -\langle u_k, \eta \rangle_{H_0^1} \to -\langle u, \eta \rangle_{H_0^1} = -(\operatorname{div} \xi)[u] = \langle \nabla u, \xi \rangle_{L^2}$$

also $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ in $(L^2(\Omega))^n$.