Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
12. Übungsblatt

Aufgabe 36

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen die Palais-Smale Bedingung erfüllen

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sin(x)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sin(x) + xy^2$

c) $I : L^2((-1, 1)) \to \mathbb{R},\ u \mapsto \int_0^1 u(t)^2\,dt$

d) $I : H_0^1((-1, 1)) \to \mathbb{R},\ u \mapsto \int_{-1}^1 u'(t)^2\,dt + \int_0^1 u(t)^2\,dt$

e) $I : H_0^1((-1, 1)) \to \mathbb{R},\ u \mapsto \int_0^1 u'(t)^2\,dt + \int_0^1 u(t)^2\,dt$

f) $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R},\ u \mapsto \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{4}|u|^4\right]\,dx$ wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet ist.

Aufgabe 37

a) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Ist $|f| + |f'|$ koerziv, so erfüllt f die Palais-Smale Bedingung.

b) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nach unten beschränkt und erfülle die Palais-Smale Bedingung. Zeigen Sie, dass f koerziv ist und ihr Infimum annimmt.

Aufgabe 38

Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $L : X \to \mathbb{R}$ eine stetig Frechét-differenzierbare und konvexe (d.h. $L[(1-t)x + ty] \leq (1-t)L[x] + tL[y]$ für alle $x, y \in X,\ t \in [0, 1]$) Abbildung. Zeigen Sie:

a) $L[x] - L[y] \leq L'[x](x - y)$ für alle $x, y \in X$.

b) Ist L strikt konvex, so besitzt L höchstens einen kritischen Punkt.

c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass es strikt konvexe Funktionale ohne kritische Punkte gibt.

Besprechung in der Übung am 29.1.2014