Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 36

Def.: (x_n) heißt PS-Folge, falls $(f(x_n))$ beschränkt ist und $f'(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$.

a) PS Bed. ist erfüllt:

Es gilt: $f(x) = x\sin(x)$, $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$. Ist $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine PS Folge, so gilt:

$$\begin{aligned} x_n^2 &= x_n^2 \sin^2(x_n) + x_n^2 \cos^2(x_n) \\ &\le f(x_n)^2 + |f'(x_n) - \sin(x_n)|^2 \le f(x_n)^2 + 2f'(x_n)^2 + 2 \le c \end{aligned}$$

Also ist (x_n) beschränkt und besitzt somit eine konvegente Teilfolge.

b) PS Bed. ist nicht erfüllt.

Es gilt: $f(x) = \sin(x) + xy^2$, $f'(x, y) = (\cos(x) + y^2, 2xy)$.
Wähle $x_n = \frac{(4n+1)\pi}{2}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$. Dann folgt

$$f(x_n, y_n) = 1 + \frac{(4n+1)\pi}{2n^4} \to 1, \quad f'(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^4}, \frac{(4n+1)\pi}{n^2}\right) \to (0,0)$$

aber (x_n, y_n) besitzt keine konvergente Teilfolge.

c) PS Bed. nicht erfüllt:

Haben: $I(u) = \int_0^1 u(t)\,dt$, $I'(u) = 2u\chi_{(0,1)}$. Wähle $u_n(t) = n\chi_{(-1,0)}(t)$. Dann gilt $I(u_n) = 0$, $I'(u_n) = 0$ sowie $\|u_n\|_{L^2((-1,1))} = n \to \infty$. Somit besitzt (u_n) keine konvergente Teilfolge

d) PS Bed. erfüllt:

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{-1}^1 u'(t)^2\,dt + \int_0^1 u(t)^2\,dt \\ I'(u)[h] &= \int_{-1}^1 2u'(t)h'(t)\,dt + \int_{-1}^1 2u(t)\chi_{(0,1)}(t)h(t)\,dt \quad (h \in H_0^1((0,1))) \\ \Rightarrow I'(u) &= 2(u + (-\Delta)^{-1}(u\chi_{(-1,1)})) \end{aligned}$$

wobei $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ der Operator ist, der $u \in H_0^1((-1,1))$ abbildet auf die schwache Lösung des Problems $-\Delta w = u$, d.h. für $w = (-\Delta)^{-1}(u)$ gilt: $\int_{-1}^1 w'(t)h'(t) = \int_{-1}^1 u(t)h(t)\,dt$ für alle $h \in H_0^1((-1,1))$.

Sei (u_n) eine PS Folge, d.h. $(I(u_n))$ ist beschränkt und $I'(u_n) \to 0$ in $H_0^1((-1,1))$. Dann folgt:

$$\|u_n\|\|I'(u_n)\| \geq |I'(u_n)[u_n]| = \int_{-1}^1 2(u_n'(t))^2\,dt + \int_0^1 2(u_n(t))^2\,dt \geq 2\int_{-1}^1 (u_n'(t))^2\,dt = 2\|u_n\|^2$$

und wegen $\|I'(u_n)\| \to 0$ folgt $\|u_n\| \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere besitzt (u_n) eine konvergente Teilfolge.

e) PS Bed. nicht erfüllt:

Es sei $\|u\| = \int_{-1}^1 [u'(t)^2 + u(t)^2]\,dt$ die Norm auf $H_0^1((-1,1))$. Dann:

$$I(u) = \int_0^1 u'(t)^2\,dt + \int_0^1 u(t)^2\,dt, \qquad I'(u) = 2u\chi_{(0,1)}.$$

Wähle $u_n(t) = \sin(n\pi t)\chi_{(-1,0)}(t) \in H_0^1((-1,1))$. Dann folgt $I(u_n) = 0$, $I'(u_n) = 0$ und $\|u_n\|_{H_0^1} = \frac{n\pi}{2} \to \infty$. Also besitzt (u_n) keine konvergente Teilfolge.

f) PS Bed. ist erfüllt.

Es gilt:

$$I(u) = \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - \tfrac{1}{4}|u|^4\right]\,dx, \qquad I'(u) = u - (-\Delta)^{-1}(u^3)$$

Sei (u_n) eine PS Folge, d.h. $(I(u_n))$ ist beschränkt und $I'(u_n) \to 0$ in $H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$c(1 + \|u_n\|) \geq 4I(u_n) - I'(u_n)[u_n] = \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx = \|u_n\|^2$$

Somit ist (u_n) beschränkt in $H_0^1(\Omega)$ und besitzt eine schwach konvergente Teilfolge mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$, $k \to \infty$. Mit der kompakten Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ folgt $(-\Delta)^{-1}(u_{n_k}^3) \to (-\Delta)^{-1}(u^3)$ und somit

$$u_{n_k} = I'(u_{n_k}) + (-\Delta)^{-1}(u_{n_k}^3) \to 0 + (-\Delta)^{-1}(u^3),$$

also die Konvergenz einer Teilfolge.

Aufgabe 37

a) Es sei $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ eine PS Folge, d.h. $(f(x_n))$ beschränkt und $f'(x_n) \to 0$, $n \to \infty$. Ist (x_n) beschränkt, so existiert eine konvergente Teilfolge und wir sind fertig. Im anderen Fall existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $|x_{n_k}| \to \infty$. Da $|f| + |f'|$ koerziv ist, folgt $|f(x_{n_k})| \to \infty$ oder $|f'(x_{n_k})| \to \infty$. In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch zur Beschränktheit von $(f(x_n))$ bzw. zu $f'(x_n) \to 0$.

b) Wir zeigen zunächst: f unbeschränkt auf $(0,\infty)$, d.h. es ex. Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$ und $f(x_n) \to \infty$.

(i) Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$ und $f'(x_{n_k}) \to 0$ für irgendeine Teilfolge von (x_n). Dann folgt $f(x_{n_k}) \to \infty$, denn andernfalls ex. Teilfolge (x_{n_k}) mit $(f(x_{n_k}))$ ist beschränkt.

Also mit der PS-Bedingung: (x_{n_k}) besitzt eine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zu $x_n \to \infty$.

(ii) Sei nun $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $f'(x_{n_k}) \not\to 0$ für alle Teilfolgen von (x_n). Dann ex. $\varepsilon > 0$ und $\delta \in \mathbb{R}$ mit $|f'(x)| > \varepsilon$ für $x > \delta$ und f' wechselt das Vorzeichen in $x > \delta$ nicht. Es folgt $|f(x)| \geq \varepsilon x + b$. Da f nach unten beschränkt ist, folgt die Existenz einer Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $f(x_n) \to \infty$.

Annahme: f nicht koerziv.

Dann existiert Folge $(y_n) \subset \mathbb{R}$ mit (o.B.d.A.) $y_n \to \infty$ und $|f(y_n)| < c < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem bisher bewiesenen ex. Folge (x_n) mit $x_n \to \infty$ und $f(x_n) \to \infty$. o.B.d.A (Auswahl einer Teilfolge) gelte:

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n < \ldots \quad \text{und} \quad f(x_i) > c, \quad i \in \mathbb{N}$$

Da $f(x_i), f(x_{i+1}) > c$ und $f(y_i) < c$ folgt: f besitzt in $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ ein lokales Minimum mit

$$d \leq f(\xi_i) \leq f(y_i) < c, \qquad \xi \to \infty$$

Die Folge (ξ_i) erfüllt also: $f'(\xi_i) \to 0$ und $(f(\xi_i))$ ist beschränkt. Da f die PS Bedingung erfüllt, ex. eine TF (ξ_{i_j}) mit ξ_{i_j} ist konvergent, im Widerspruch zu $\xi_i \to \infty$.

Aufgabe 38

a) Definiere $g(t) := L[ty + (1-t)x]$, $t \in [0,1]$. Da L stetig Frechét-differenzierbar ist, folgt $g \in C^1([0,1])$. Nach dem Mittelwertsatz existiert für $t \in (0,1]$ ein $\xi = \xi(t) \in (0,t)$ mit

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(\xi) = L'(\underbrace{\xi y + (1-\xi)x}_{=:\theta_\xi})[y - x]$$

und es folgt

$$g(t) = tL'(\theta_\xi)[y-x] + L[x].$$

Wegen der Konvexität gilt außerdem

$$g(t) \leq tL[y] + (1-t)L[x]$$

und zusammen ($t \neq 0$!):

$$L'(\theta_\xi)[y - x] \leq L[y] - L[x]. \tag{1}$$

Wähle nun die Folge $t_n := \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann folgt $\xi(t_n) \in (0, \frac{1}{n})$ und folglich $\xi(t_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Aus (1) folgt dann für $n \to \infty$, da $L'(\theta_{\xi(t_n)})[y-x] \to L'(x)[y-x]$ (beachte die stetige Frechét-Differenzierbarkeit):

$$L'(x)[y-x] \leq L[y] - L[x] \iff L'(x)[x-y] \geq L[x] - L[y].$$

b) Angenommen, es existieren $x_0, y_0 \in X$ ($x_0 \neq y_0$) mit $L'(x_0) = 0$, $L'(y_0) = 0$. Mit a) folgt:

$$L[x_0] - L[y_0] \leq 0 \quad \text{sowie} \quad L[y_0] - L[x_0] \leq 0$$

also $L[x_0] = L[y_0]$.

Für $t \in [0,1]$ definiere $f(t) := L[tx_0 + (1-t)y_0]$. Dann gilt $f(0) = f(1)$ und somit existiert ein $t^* \in (0,1)$ mit $f'(t^*) = 0$, also $L'(t^*x_0 + (1-t^*)y_0)[x_0 - y_0] = 0$. Da $L'(t^*x_0 + (1-t^*)y_0)$ ein stetiges, lineares Funktional ist, folgt

$$\begin{aligned} L'(t^*x_0 + (1-t^*)y_0)[t^*(x_0 - y_0)] &= 0 \\ L'(t^*x_0 + (1-t^*)y_0)[x_0] &= L'(t^*x_0 + (1-t^*)y_0)[y_0] \end{aligned}$$

Insgesamt also

$$L'(t^*x_0 + (1-t^*)y_0)[t^*x_0 + (1-t^*)y_0] = L'(t^*x_0 + (1-t^*)y_0)[y_0].$$

Mit a) gilt dann

$$\begin{aligned} L[t^*x_0 + (1-t^*)y_0] - L[y_0] &\le L'(t^*x_0 + (1-t^*)y_0)[t^*x_0 + (1-t^*)y_0 - y_0] \\ &= L'(t^*x_0 + (1-t^*)y_0)[t^*(x_0 - y_0)] = 0, \end{aligned}$$

also

$$L[t^*x_0 + (1-t^*)y_0] = L[y_0] = L[x_0].$$

Aufgrund der strengen Konvexität gilt nun aber

$$L[x_0] = L[t^*x_0 + (1-t^*)y_0] < t^*L[x_0] + (1-t^*)\underbrace{L[y_0]}_{L[x_0]} = L[x_0],$$

ein Widerspruch.

c) z.B. $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x) = e^x$.