Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 39

Die in der Aufgabenstellung geg. Funktion f erfüllt die PS-Bed., denn: Für $|(x,y)| \to \infty$ gilt $f(x,y) \leq 9|(x,y)|^2 - |(x,y)|^4 + |(x,y)| \to -\infty$ und somit ist $|f|$ koerziv, also auch $|f| + |f'|$ koerziv. Nach Aufgabe 37a) folgt, dass f die PS-Bed. erfüllt.
Überprüfe nun die Voraussetzungen des Mountain Pass Satzes. Wegen $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ist f Lipschitzstetig auf beschränkten Mengen. Haben:

$$f(x,y) = 9|(x,y)|^2 - |(x,y)|^4 + y \sin x.$$

Es gilt:

- $f(0,0) = 0$
- $|(x,y)| = 2 \Rightarrow f(x,y) = 9 \cdot 2^2 - 2^4 + \underbrace{y \sin x}_{\in[-2,2]} \geq 18 > f(0,0)$
- Für $v = (4,0)$ gilt $f(e) = f(4,0) = 9 \cdot 4^2 - 4^4 = -112$

Sei $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \mathbb{R}^2) \text{ mit } \gamma(0) = (0,0), \gamma(1) = v\}$, $c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J[\gamma(t)] \geq 18$.
Nach dem Mountain-Pass Satz ist c ein (positiver) kritischer Wert von f.

Aufgabe 40

Es gilt: $f(t) := (t+1)^+ - t - 1$ und folglich

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds = \begin{cases} 0 & t \geq -1 \\ -\frac{1}{2}(|t|-1)^2 & t \leq -1 \end{cases}$$

Das zugehörige Funktional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist somit gegeben durch

$$J[u] = \int_\Omega \frac{1}{2}(u')^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\{u\leq -1\}} (|u|-1)^2\, dx.$$

Wir prüfen die Voraussetzungen des Mountain Pass Satzes:

(i) Zeige: I Lipschitz stetig auf beschränken Mengen, d.h. für alle $G \subset H_0^1(\Omega)$ mit G beschränkt existiert $K > 0$, so dass für alle $u, \tilde{u} \in G$ gilt:

$$\|I'(u) - I'(\tilde{u})\| \leq L\|u - \tilde{u}\|.$$

Es gilt:

$$I'(u)[v] = \int_\Omega u'v'dx + \int_{\{u\le -1\}} (-u+1)vdx.$$

Also (schreibe $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H_0^1}$):

$$\begin{aligned}
|I'(u)[v] - I'(\tilde u)[v]| &= \int_\Omega |\tilde u' - u'||v'|\,dx + \int_\Omega \left|(1-u)\chi_{\{u\le -1\}} - (1-\tilde u)\chi_{\{\tilde u\le -1\}}\right| |v|\,dx \\
&\le \|u-\tilde u\|\|v\| + \int_\Omega \left|(1-u)\chi_{\{u\le -1\}} - (1-\tilde u)\chi_{\{u\le -1\}}\right| |v|\,dx \\
&\quad + \int_\Omega \left|(1-\tilde u)\chi_{\{u\le -1\}} - (1-\tilde u)\chi_{\{\tilde u\le -1\}}\right| |v|\,dx \\
&\le \|u-\tilde u\|\|v\| + \int_\Omega |u-\tilde u| \underbrace{|\chi_{\{u\le -1\}}|}_{\le 1} |v|\,dx \\
&\quad + \underbrace{\int_\Omega |(1-\tilde u)||\chi_{\{u\le -1\}} - \chi_{\{\tilde u\le -1\}}||v|\,dx}_{\int_{M(u,\tilde u)} |1-\tilde u||v|\,dx}
\end{aligned}$$

wobei $M(u,\tilde u) = (\{\tilde u > 1\} \cap \{u \le -1\}) \cup (\{u > 1\} \cap \{\tilde u \le -1\})$.

Es gilt (beachte $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$, da $\Omega = (-L, L)$): Ist $x \in M(u,\tilde u)$, so folgt $|u(x) - \tilde u(x)| > 2 > 1$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{M(u,\tilde u)} |1-\tilde u||v|\,dx = \int_{M(u,\tilde u)} |1-\tilde u||v| 1\,dx &< \int_{M(u,\tilde u)} |1-\tilde u||v||u-\tilde u|\,dx \\
&\le \int_\Omega |1-\tilde u||v||u-\tilde u|\,dx \le \|1-\tilde u\|_{L^3}\|\|v\|_{L^3}\|u-\tilde u\|_{L^3} \\
&\le C\|1-\tilde u\|_{H^1}\|v\|\|u-\tilde u\|
\end{aligned}$$

Da G beschränkt in $H_0^1(\Omega)$ und Ω ebenfalls beschränkt, folgt $\|1-w\|_{H^1} \le \tilde C$ für alle $w \in G$. Also

$$|I'(u)[v] - I'(\tilde u)[v]| \le \|u-\tilde u\|\|v\| + C\tilde C\|u-\tilde u\|\|v\|$$

und somit $\|I'(u) - I'(\tilde u)\| \le C\tilde C \|u-\tilde u\|_{H_0^1(\Omega)}$

(ii)

$$\begin{aligned}
I[u] &= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{H_0^1} - \int_{\{u\le -1\}} (|u|-1)^2 dx\right) \\
&\overset{(*)}{\ge} \frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{H_0^1} - \int_{\{u\le -1\}} |u|^4 dx\right) \qquad (*)\ (|z|-1)^2 < |z|^4 \text{ für alle } z \le -1 \\
&\ge \frac{1}{2}(\|u\|^2_{H_0^1} - \|u\|^4_{L^4}) \\
&\overset{H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)}{\ge} \frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{H_0^1} - C\|u\|^4_{H_0^1}\right) \qquad \text{(Beachte: } C = C(L)!)
\end{aligned}$$

Klar: $I[0] = 0$. Wähle $r = \frac{1}{\sqrt{2C}}$, $a = \frac{1}{8C} > 0$. Dann gilt für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{H_0^1} = r$: $I[u] \ge a$.

Wähle $\omega \in H_0^1(\Omega)$ stetig u. stückweise linear mit

$$\omega(-L) = \omega(L) = 0, \omega(x) = -K \quad \text{für} \quad x \in [-\tfrac{L}{2}, \tfrac{L}{2}] \quad (K > 0).$$

Dann folgt

$$\|\omega\|_{H_0^1} = \left(\int_{-L}^{-\frac{L}{2}} K^2 dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} K^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (2\tfrac{L}{2}K^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{L}K > \frac{1}{\sqrt{2C}} = r \quad \text{für} \quad K > \frac{1}{\sqrt{2CL}},$$

$$I[\omega] \leq \frac{1}{2}LK^2 - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (K-1)^2 dx = \tfrac{1}{2}LK^2 - L(K-1)^2 < 0 \quad \text{für } K \text{ groß genug.}$$

Also sind Bedingungen aus dem Mountain-Pass-Satz erfüllt. Bleibt noch zu zeigen:

(iii) I erfüllt die Palais-Smale-Bedingung

Es gilt:

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega (u')^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\{u \leq -1\}} (-u^2 + 2|u| - 1)\, dx$$
$$I'(u)[v] = \int_\Omega u'v' dx + \int_{\{u \leq -1\}} (-u + 1)v\, dx$$

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ Folge mit $I[u_n] \to c \ (\in \mathbb{R}),\ I'(u_n) \to 0 \ (n \to \infty)$.
Angenommen, (u_n) wäre nicht beschränkt in $H_0^1(\Omega)$, d.h. $\|u_n\| \to \infty \quad (\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H_0^1}!)$
Dann gilt nach Voraussetzung

$$2I[u_n] = \|u_n\|^2 + \int_{\{u_n \leq -1\}} (-u_n^2 + 2|u_n| - 1)\, dx \tag{1}$$
$$I'(u_n)[u_n] = \|u_n\|^2 + \int_{\{u_n \leq -1\}} (-u_n^2 + |u_n|)\, dx \tag{2}$$

Wegen $I[u_n] \to c$ und $I'(u_n) \to 0$, folgt

$$\frac{I[u_n]}{\|u_n\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{sowie} \quad \frac{I'(u_n)[u_n]}{\|u_n\|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

und somit:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2I[u_n] - I'(u_n)[u_n]}{\|u_n\|} = \lim_{n\to\infty} \int_{\{u_n \leq -1\}} \left(\frac{|u_n| - 1}{\|u_n\|} \right) dx.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \frac{I'(u_n)[u_n]}{\|u_n\|^2} \overset{(2)}{=} 1 + \lim_{n\to\infty} \int_{\{u_n \leq -1\}} \frac{-u_n^2 + |u_n|}{\|u_n\|^2}\, dx \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \int_{\{u_n \leq -1\}} \frac{|u_n|(|u_n| - 1)}{\|u_n\|^2}\, dx \\
&\overset{H_0^1((-L,L)) \hookrightarrow C((-L,L))}{\geq} 1 - \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\|u_n\|_\infty}{\|u_n\|}}_{\leq C} \underbrace{\int_\Omega \frac{|u_n| - 1}{\|u_n\|} dx}_{\to 0} = 1, \quad \text{Widerspruch!}
\end{aligned}$$

Also ist (u_n) beschränkt in $H_0^1(\Omega)$. Somit ex. TF $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega) \Rightarrow u_{n_k} \to u$ in $L^2(\Omega) \Rightarrow u_{n_k} \to u$ in $L^1(\Omega) \Rightarrow u_{n_k} \to u$ f. ü. in Ω (nach Auswahl einer weiteren TF).

Zusammen mit dem Satz über die dom. Konvergenz folgt:

$$\int_{\{u_{n_k}\le -1\}} (-u_{n_k}^2 + |u_{n_k}|)\,dx \to \int_{\{u\le -1\}} (-u^2 + |u|)\,dx \qquad (k\to\infty).$$

Mit der Notation aus Aufgabe 36 können wir I' auch darstellen als

$$I'(u) = u + (-\Delta)^{-1}\left((-u+1)\chi_{\{u\le -1\}}\right)$$

und die eben bewiesene Konvergenz zeigt

$$(-\Delta)^{-1}\left((-u_{n_k}+1)\chi_{\{u_{n_k}\le -1\}}\right) \to (-\Delta)^{-1}\left((-u+1)\chi_{\{u\le -1\}}\right), \quad (k\to\infty).$$

Wegen $I'(u_{n_k}) \to$ folgt somit

$$u_{n_k} = I'(u_{n_k}) - (-\Delta)^{-1}\left((-u_{n_k}+1)\chi_{\{u_{n_k}\le -1\}}\right) \to (-\Delta)^{-1}\left((-u+1)\chi_{\{u\le -1\}}\right), \quad (k\to\infty)$$

also die Konvergenz einer Teilfolge.