Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
14. Übungsblatt

Aufgabe 41 (Bochner-Integral)

Es sei H ein separabler Hilbertraum. Eine Funktion $u : [a, b] \to H$ heißt stark messbar, falls eine Folge einfacher Funktionen (d.h. Funktionen der Form $w = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i$ mit $u_i \in H$ und Lebesgue-messbaren Teilmengen E_i von $[a, b]$) existiert, so dass

$$s_n \to u \text{ fast überall in } [a, b] \; (n \to \infty).$$

Für eine einfache Funktion w definieren wir das Bochner-Integral durch

$$\int_a^b w(t)\, dt := \sum_{i=1}^m \text{meas}(E_i) u_i.$$

Beweisen Sie zunächst

a) Ist $u : [a, b] \to H$ stetig, so ist u stark messbar.

b) Ist $u : [a, b] \to H$ stark messbar und existiert eine Folge (s_n) einfacher Funktionen mit der Eigenschaft
$$\int_a^b \|u(t) - s_n(t)\|_H \, dt \to 0 \quad (n \to \infty),$$
so existiert auch $\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(t)\, dt$ in H und ist unabhängig von der gewählten Folge (s_n).

Eine stark messbare Funktion mit der Eigenschaft (b) heißt Bochner-integrierbar. Das Bochner-Integral ist definiert durch

$$\int_a^b u(t)\, dt := \lim_{n\to\infty} s_n(t)\, dt,$$

wobei (s_n) eine beliebige Folge einfacher Funktionen mit $\int_a^b \|u(t) - s_n(t)\|_H \, dt \to 0$ ist.
Zeigen Sie, dass $u : [a, b] \to H$ Bochner-intergrierbar ist genau dann wenn $t \mapsto \|u(t)\|_H$ Lebesgue-integrierbar auf $[a, b]$ ist und stark messbar. Beweisen Sie weiter, dass in diesem Fall gilt:

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\|_H \le \int_a^b \|u(t)\|_H \, dt.$$

Besprechung in der Übung am 12.2.2014