Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 41

Bemerkung: Es ist leicht einzusehen, dass das Bochner-Integral einer einfachen Funktion unabhängig von der gewählten Darstellung ist und dass gilt:

$$\left\| \int_a^b w(t)\,dt \right\|_H \leq \int_a^b \|w(t)\|_H\,dt.$$

Beweis der Ungleichung: (o.B.d.A. seien die E_i disjunkt)

$$\left\| \int_a^b w(t)\,dt \right\|_H = \left\| \sum_{i=1}^m |E_i| u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^m |E_i| \|u_i\|_H = \sum_{i=1}^m \int_a^b \chi_{E_i} \|u_i\|_H\,dt \overset{E_i \text{ disj.}}{=} \int_a^b \left\| \sum_{i=1}^m \chi_{E_i} u_i \right\|_H$$

a) Sei $u \in C([a,b], H)$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \ldots, n-1$ definiere $I_k = \big[a + \frac{k}{n}(b-a), a + \frac{k+1}{n}(b-a)\big)$. Mit $\xi_k \in I_k$ definiere Folge $(s_n) \subset H$ einfacher Funktionen durch

$$s_n := \sum_{k=0}^{n-1} u(\xi_k) \chi_{I_k}$$

Offenbar gilt für alle $x \in [a,b)$: $s_n(x) \to u(x)$, also ist u stark messbar

b) Sei u stark messbar und (s_n) eine Folge einfacher Funktionen mit

$$\int_a^b \|u(t) - s_n(t)\|_H\,dt \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt (beachte: $s_n - s_m$ einfache Funktion):

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b s_n(t)\,dt - \int_a^b s_m(t)\,dt \right\|_H &= \left\| \int_a^b (s_n(t) - s_m(t))\,dt \right\|_H \\
&\leq \int_a^b \|s_n(t) - s_m(t)\|_H\,dt \\
&\leq \int_a^b \|s_n(t) - u(t)\|_H\,dt + \int_a^b \|s_m(t) - u(t)\|_H\,dt \to 0 \quad (n, m \to \infty)
\end{aligned}$$

Also ist $\left(\int_a^b s_n(t)\,dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H und somit existiert auch $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b s_n(t)\,dt$.

Ist $(\tilde{s}_n)$ eine weitere Folge einfacher Funktionen mit $\int_a^b \|\tilde{s}_n(t) - u(t)\|_H \, dt$ so gilt

$$\begin{aligned}\left\| \int_a^b s_n(t)\, dt - \int_a^b \tilde{s}_n(t)\, dt \right\|_H &\leq \int_a^b \|s_n(t) - \tilde{s}_n(t)\|_H \, dt \\ &\leq \int_a^b \|s_n(t) - u(t)\|_H \, dt + \int_a^b \|\tilde{s}_n(t) - u(t)\|_H \, dt \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \tilde{s}_n(t)\, dt.$$

Sei u Bochner-integrierbar. Dann existiert eine Folge (s_n) einfacher Funktionen mit $s_n \to u$ fast überall und $\int_a^b \|s_n(t) - u(t)\|_H \, dt \to 0$. Insbesondere ist u stark messbar und $t \mapsto \|u(t)\|_H$ ist als fast überall punktweiser Limes von $t \mapsto \|s_n\|_H$ messbar. Weiter gilt:

$$\int_a^b \|u(t)\|_H \, dt \leq \int_a^b \|s_n(t) - u(t)\|_H \, dt + \int_a^b \|s_n(t)\|_H \, dt < \infty,$$

d.h. $t \mapsto \|u(t)\|_H$ ist Lebesgue integrierbar.
Sei nun $t \mapsto \|u(t)\|_H$ Lebesgue integrierbar und u stark messbar. Dann ex. eine Folge (s_n) einfacher Funktionen mit $s_n \to u$ fast überall. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze

$$\tilde{s}_n(t) := \begin{cases} s_n(t), & \text{falls } \|s_n(t)\|_H \leq (1+\varepsilon)\|u(t)\|_H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $t \mapsto \|u(t)\|_H$ integrierbar, so ist insbesondere $\{t \in [a,b] : \ \|s_n(t)\|_H \leq (1+\varepsilon)\|u(t)\|_H\} =: E_n$ messbar und daher $\tilde{s}_n = s_n \chi_{E_n}$ einfach. Es gilt $\tilde{s}_n \to u$ $(n \to \infty)$ fast überall und

$$\|\tilde{s}_n(t) - u(t)\|_H \leq \|\tilde{s}_n(t)\|_H + \|u(t)\|_H \leq (2+\varepsilon)\|u(t)\|_H.$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz impliziert nun

$$\int_a^b \|\tilde{s}_n(t) - u(t)\|_H \, dt \to 0,$$

d.h. u ist Bochner-integrierbar.
Aus $\|\tilde{s}_n(t)\|_H \leq (1+\varepsilon)\|u(t)\|_H, \int_a^b \tilde{s}_n(t)\, dt \to \int_a^b u(t)\, dt$ erhalten wir noch

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\|_H = \lim_{n\to\infty} \left\| \int_a^b \tilde{s}_n(t)\, dt \right\|_H \leq \limsup_{n\to\infty} \int_a^b \|\tilde{s}_n(t)\|_H \, dt \leq (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\|_H \, dt$$

und $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung.