Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Navier-Stokes Gleichungen für eine stationäre inkompressible Flüssigkeit:

$$(*) \quad \begin{cases} \rho(v_t + (v \cdot \nabla)v) &= -\nabla p + \eta \Delta v \\ \operatorname{div} v &= 0. \end{cases}$$

Hierbei gilt: $\rho > 0$, $\rho =$const. Unbekannte Funktionen sind Druck $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und Geschwindigkeit $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Einsetzen des Ansatzes $v(x, y) = (u(x, y), 0)$ in $(*)$ liefert

$$\rho u u_x = -p_x + \eta(u_{xx} + u_{yy}) \tag{1}$$
$$0 = p_y \tag{2}$$
$$u_x = 0 \tag{3}$$

Aus (2) folgt $p(x, y) = p(x)$ und (3) impliziert $u(x, y) = u(y)$. (3) in (1) einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & 0 = -p_x(x) + \eta u_{yy}(y) \\ \Rightarrow \quad & p_x(x) = \eta u_{yy}(y) \qquad \text{für alle } x \in (0, L),\ y \in (0, 1) \\ \Rightarrow \quad & p_x(x) = \alpha, \quad \eta u_{yy}(y) = \alpha \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & p(x) = \alpha x + p_0, \quad u(y) = \tfrac{\alpha}{2\eta} y^2 + \beta y + \gamma \end{aligned}$$

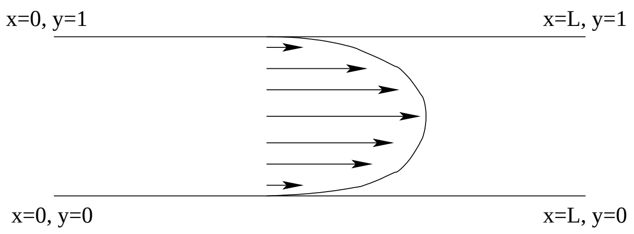
Einsetzen der Randbedingungen $p(0) = p_1$, $p(L) = p_2$ sowie $u(0) = u(1) = 1$ liefert

$$p_0 = p_1,\ \alpha = \tfrac{p_2 - p_1}{L},\ \gamma = 0,\ \beta = -\tfrac{\alpha}{2\eta},$$

also

$$p(x) = \tfrac{p_2 - p_1}{L}, \quad u(y) = \tfrac{p_2 - p_1}{2L\eta} y(y - 1).$$

Es ergibt sich also ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil:



Aufgabe 2

Eulergleichung und Kontinuitätsgleichung:

$$\rho(v_t + (v\cdot\nabla)v) = \nabla p \tag{4}$$
$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \tag{5}$$

Für eine stationäre Stömung gilt: $v_t = 0$. Die Relation $p(x,t) = \hat{p}(\rho(x,t))$ liefert (beachte: $\hat{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$)

$$\tfrac{1}{\rho(x,t)}\nabla p(x,t) = \tfrac{1}{\rho(x,t)}\hat{p}'(\rho(x,t))\nabla\rho(x,t) = -\nabla w(x,t),$$

wobei $w(x,t) = \hat{w}(\rho(x,t))$ mit $\hat{w}:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ \hat{w}'(\rho) = -\frac{1}{\rho}\hat{p}'(\rho)$.
Mit der Formel aus dem Hinweis (Beweis durch Nachrechnen) folgt:

$$\tfrac{1}{2}\nabla|v|^2 = \underbrace{(v\cdot\nabla v)v}_{\overset{(4)}{=}\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla w} + v\times\operatorname{rot} v.$$

Also

$$\nabla\left(\tfrac{1}{2}|v|^2 + w\right) = v\times\operatorname{rot} v.$$

Entlang einer Stromlinie γ gilt:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{ds}\left(\tfrac{1}{2}|v|^2 + w\right)(\gamma(s)) &= \nabla\left(\tfrac{1}{2}|v|^2 + w\right)\cdot\gamma'(s)\\ &= (v\times\operatorname{rot} v)\cdot\gamma'(s)\\ &= 0\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt, da $\gamma'(s) = v(\gamma(s))$ gilt und $v\times\operatorname{rot} v$ senkrecht auf v (und $\operatorname{rot} v$) steht.

Aufgabe 3

Einsetzen des Ansatzes in die nichtlineare Schrödingergleichung liefert

$$-\omega e^{i\omega t}v(x) + e^{i\omega t}v''(x) + |e^{i\omega t}v(x)|^2 e^{i\omega t}v(x) = 0,$$

d.h.

$$-v''(x) + \omega v(x) = v(x)^3.$$

Multiplizieren mit v':

$$-v''v' + \omega vv' = v^3v' \iff \left(-\tfrac{1}{2}(v')^2\right)' + \omega\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)' = \left(\tfrac{1}{4}v^4\right)'$$

also

$$-(v')^2 + \omega v^2 = \tfrac{1}{2}v^4 + c$$

mit $c\in\mathbb{R}$. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} v'(x) = 0$ folgt $c = 0$, d.h.

$$v'(x) = -\sqrt{\omega v(x)^2 - \tfrac{1}{2}v(x)^4}, \qquad x > 0$$

(Beachte: $v(x) > 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = 0$ führt auf $v'(x)\le 0$ für $x > 0$.)
Löse mit Trennung der Variablen ($v > 0!$):

$$\int\frac{dv}{v\sqrt{\omega - \frac{1}{2}v^2}} = -x + c \qquad (c\in\mathbb{R})$$

Substituiere: $\frac{v}{\sqrt{2\omega}} = \cos t$. Dann $\frac{dv}{dt} = -\sin t\sqrt{2\omega}$ und es folgt:

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{\omega - \frac{1}{2}v^2}} = \int \frac{-\sin t\sqrt{2\omega}\,dt}{\sqrt{2\omega}\cos t\sqrt{w - w\cos^2 t}} = -\frac{1}{\sqrt{w}}\int \frac{1}{\cos t}\,dt$$

(Beachte: Haben angenommen: $\sqrt{w - w\cos^2 t} = w\sin t$ (eigentlich: $w|\sin t|$), also: Lösung am Ende durch Einsetzen in die Gleichung überprüfen)
Substituiere $t = 2\arctan\tau$. Dann $\frac{dt}{d\tau} = \frac{2}{1+\tau^2}$ und es gilt

$$\cos t = \cos(2\arctan\tau) = \cos^2(\arctan\tau) - \sin^2(\arctan\tau) = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}.$$

(denn: $\cos^2(\arctan\tau) = 1 - \sin^2(\arctan\tau) \iff 1 = \frac{1}{\cos^2(\arctan\tau)} - \underbrace{\tan^2(\arctan\tau)}_{=\tau^2}$.)

Wir erhalten nun:

$$\begin{aligned}
-x + c = \int \frac{dv}{v\sqrt{\omega - \frac{1}{2}v^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\int \frac{1}{\cos t}\,dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\int \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}\frac{2}{1+\tau^2}\,d\tau = -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\int \frac{1}{1-\tau} + \frac{1}{1+\tau}\,d\tau \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left[-\ln(1-\tau) + \ln(1+\tau)\right] = -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\ln\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right) \\
\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right) &= \sqrt{\omega}x + \tilde{c} \\
\Rightarrow\quad \tau &= \frac{e^{\sqrt{\omega}x+\tilde{c}} - 1}{e^{\sqrt{\omega}x+\tilde{c}} + 1}
\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned}
v(x) = \sqrt{2\omega}\cos t = \sqrt{2\omega}\,\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} &= \sqrt{2\omega}\,\frac{2e^{\sqrt{\omega}x+\tilde{c}}}{e^{2\sqrt{\omega}x+2\tilde{c}} + 1} \\
&= \frac{2\sqrt{2\omega}}{e^{\sqrt{\omega}x+\tilde{c}} + e^{-\sqrt{\omega}x-\tilde{c}}} = \frac{\sqrt{2\omega}}{\cosh(\sqrt{\omega}x + \tilde{c})}
\end{aligned}$$

Wegen $v(x) = v(-x)$ folgt $\tilde{c} = 0$ und somit

$$v(x) = \frac{\sqrt{2\omega}}{\cosh(\sqrt{\omega}x)}$$

Nachrechen zeigt, dass v tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Aufgabe 4

Wir rechnen nach, dass φ die Minimalflächengleichung $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}}\right) = 0$ erfüllt. Es gilt:

$$\nabla\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \tan x \\ -\tan y \end{pmatrix} \Rightarrow 1 + |\nabla\varphi|^2 = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y.$$

Weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x+\tan^2 y}}\right) &= \frac{(1+\tan^2 x)\sqrt{\dots}-\tan x\,\frac{1}{2\sqrt{\dots}}\,2\tan x(1+\tan^2 x)}{1+\tan^2 x+\tan^2 y}\\
&= \frac{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x+\tan^2 y)-\tan^2 x(1+\tan^2 x)}{(1+\tan^2 x+\tan^2 y)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)}{(1+\tan^2 x+\tan^2 y)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\tan y}{\sqrt{1+\tan^2 x+\tan^2 y}}\right)
\end{aligned}$$

Also erfüllt φ die Minimalflächengleichung.
Bemerkung: Auch ohne Rechnen kann man sofort einsehen, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x+\tan^2 y}}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\tan y}{\sqrt{1+\tan^2 x+\tan^2 y}}\right)$$

gilt.