Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
2. Übungsblatt

Aufgabe 5

Es sei H ein Hilbertraum. Eine Abbildung $A : H \to H$ heißt monoton, falls für alle $u, v \in H$ gilt:

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0.$$

Im Folgenden sei Ω ein beschränktes Gebiet. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein monotones Vektorfeld mit der Eigenschaft $|a(p)| \leq c(1 + |p|)$ für ein $c > 0$ und alle $p \in \mathbb{R}^n$, so existiert zu jedem $u \in H_0^1(\Omega)$ ein $w_u \in H_0^1(\Omega)$ mit:

$$\langle w_u, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx \quad \text{for all } v \in H_0^1(\Omega).$$

b) Der Operator $A : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, $u \mapsto w_u$ ist monoton.

c) Gilt $\langle y - Av, u - v\rangle_{H_0^1} \geq 0$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$, so folgt $Au = y$.

d) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ mit $u_n \rightharpoonup u$, $Au_n \rightharpoonup y$ und $\langle Au_n, u_n\rangle \to \langle y, u\rangle$. Dann gilt $Au = y$.

Aufgabe 6

Betrachten Sie das folgende nichtlineare Randwertproblem auf einem beschränkten Gebiet Ω:

$$A(u, v) := \int_\Omega \left[a(\nabla u) \cdot \nabla v + \beta \sum_{i=1}^n b_i(u)(\partial_i u)v + c(u)v \right] dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$, $\beta \in \mathbb{R}$ und

a) a ist ein monotones Vektorfeld, das die Eigenschaften i)-iii) aus der Vorlesung erfüllt

b) $b_1, \ldots, b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind beschränkt und stetig

c) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und es gilt $c(z)z \geq c_0$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass für $|\beta|$ genügend klein die folgende Koerzivitätsbedingung erfüllt ist:

$$A(u, u) \geq \delta_0 \|u\|_{H_0^1}^2 - \mu_0 \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega)$$

für ein $\delta_0 > 0$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7

Es gelten die Notationen und Voraussetzungen aus Aufgabe 8. Verallgemeinern Sie die Galerkin-Methode aus der Vorlesung und beweisen die Existenz einer Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems

$$\int_\Omega \left[a(\nabla u) \cdot \nabla v + \beta \sum_{i=1}^n b_i(u)(\partial_i u)v + c(u)v \right] dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Nehmen Sie hierbei an, dass $|\beta|$ genügend klein ist und die Koerzivitätsbedingung aus Aufgabe 8 erfüllt ist.
Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Beweisen Sie die Existenz einer Galerkin Approximation $u_k \in V_k = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k\}$ wobei $\{w_1, w_2, \ldots\}$ eine Orthonormalbasis von $H_0^1(\Omega)$ ist.

2. Verwenden Sie Aufgabe 8 um die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zu beweisen.

3. Zeigen Sie, dass der schwache Grenzwert $u \in H_0^1(\Omega)$ eine Lösung des gegebenen Problems ist. Zeigen Sie hierfür die Existenz eines $\xi \in (L^2(\Omega))^n$ und einer Teilfolge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} := (u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:

   (i) $\int_\Omega a(\nabla v_j) \cdot \nabla\phi \, dx \to \int_\Omega \xi \cdot \nabla\phi \, dx$ für alle $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

   (ii) $\int_\Omega \left[\xi \cdot \nabla\phi + \beta \sum_{i=1}^n b_i(u)(\partial_i u)\phi + c(u)\phi\right] dx = \int_\Omega f\phi \, dx$ für alle $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

   (iii) $\int_\Omega a(\nabla v_j) \cdot \nabla v_j \, dx \to \int_\Omega \xi \cdot \nabla u \, dx$.

   (iv) $\int_\Omega (\xi - a(\nabla\phi)) \cdot (\nabla u - \nabla\phi) \, dx \geq 0$ für alle $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Besprechung in der Übung am 6.11.2013