Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
2. Übungsblatt

Aufgabe 5

a) Sei $u \in H_0^1(\Omega)$. Wir zeigen: $T_u : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R},\ v \mapsto \int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx$ ist ein beschränktes, lineares Funktional. Dann folgt die Behauptung aus dem Darstellungssatz von Riesz. Die Linearität ist klar. Für $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}\left| \int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx \right| &\leq c \int_\Omega (1 + |\nabla u|)|\nabla v| \, dx \leq c \left(\sqrt{|\Omega|} + \|\nabla u\|_{L^2} \right) \|\nabla v\|_{L^2} \\ &= c \left(\sqrt{|\Omega|} + \|\nabla u\|_{L^2} \right) \|v\|_{H_0^1}. \\ \Rightarrow \|T_u\| &\leq c \left(\sqrt{|\Omega|} + \|\nabla u\|_{L^2} \right)\end{aligned}$$

b) Für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v \rangle_{H_0^1} &= \langle w_u - w_v, u - v \rangle_{H_0^1} \\ &= \int_\Omega \underbrace{(a(\nabla u) - a(\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v)}_{\geq 0} \, dx \geq 0\end{aligned}$$

c) Sei $y \in H_0^1(\Omega)$ und für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gelte: $\langle y - Av, u - v \rangle \geq 0$. Sei $0 < t < 1$, $w \in H_0^1(\Omega)$ beliebig und $v := u - tw$. Einsetzen in die Ungleichung ergibt:

$$0 \leq \langle y - A(u - tw), tw \rangle \overset{t \in (0,1)}{\Longleftrightarrow} 0 \leq \langle y - A(u - tw), w \rangle$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}|\langle y - A(u - tw), w \rangle| &= \left| \int_\Omega \left[\nabla y \cdot \nabla w - a(\nabla u - t\nabla w) \cdot \nabla w \right] \, dx \right| \\ &\overset{|t| \in (0,1)}{\leq} \left(\|y\|_{H_0^1} + c(\sqrt{|\Omega|} + \|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1}) \right) \|w\|_{H_0^1}\end{aligned}$$

Da a stetig ist folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz:

$$\langle y - A(u - tw), w \rangle = \int_\Omega \left[\nabla y \cdot \nabla w - a(\nabla u - t\nabla w) \cdot \nabla w \right] \, dx$$

$$\overset{t \to 0^+}{\to} \int_\Omega \left[\nabla y \cdot \nabla w - a(\nabla u) \cdot \nabla w \right] \, dx = \langle y - Au, w \rangle.$$

Somit folgt: $\langle y - Au, w\rangle \geq 0$ für alle $w \in H_0^1(\Omega)$. Wiederhole das Argument mit $v = u + tw$, $t \in (0,1)$ und $w \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Dann gilt: $\langle y - Au, w\rangle \leq 0$ für alle $w \in H_0^1(\Omega)$ und insgesamt also

$$\langle y - Au, w\rangle = 0 \quad \text{für alle } w \in H_0^1(\Omega).$$

Es folgt $y - Au = 0$, also $Au = y$.

d) Wir verwenden das Resultat aus c): Sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\langle y - Av, u - v\rangle &= \langle y, u\rangle - \langle Av, u\rangle - \langle y, v\rangle + \langle Av, v\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle - \langle Au_n, v\rangle + \langle Av, v\rangle\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0 \qquad \text{da } A \text{ monoton.} \\
&\overset{c)}{\Longrightarrow} Au = y
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Erinnerung: a erfüllt die Bedingungen:

i) Monotonie: $(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) \geq 0$ für alle $p, q \in \mathbb{R}^n$

ii) Wachstumsbedingung: $|a(p)| \leq C(1 + |p|)$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$

iii) $a(p) \cdot p \geq \delta |p|^2 - \mu$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$, wobei $\delta > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Mit C_P bezeichnen wir die Poincaré-Konstante des Gebiets, d.h. es gilt:

$$\|u\|_{L^2} \leq C_P \|u\|_{H_0^1} \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega).$$

Weiter sei $M := \sqrt{\sum_{j=1}^n \|b_j\|_{L^\infty}^2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A(u,u) &= \int_\Omega \left[a(\nabla u) \cdot \nabla u + \beta \sum_{i=1}^n b_i(u)(\partial_i u) u + c(u) u\right] dx \\
&\overset{iii),c)}{\geq} \int_\Omega \left[\delta |\nabla u|^2 - \mu - |\beta| \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty} |\partial_i u||u| + c_0\right] dx \\
&\overset{\text{CSU}}{\geq} \delta \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - |\beta| M \int_\Omega |\nabla u||u|\, dx + (c_0 - \mu)|\Omega| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\geq} \delta \|u\|_{H_0^1}^2 - |\beta| M \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + (c_0 - \mu)|\Omega| \\
&\geq (\underbrace{\delta - |\beta| M C_P}_{=:\delta_0}) \|u\|_{H_0^1}^2 + \underbrace{(c_0 - \mu)|\Omega|}_{=:-\mu_0}
\end{aligned}$$

Gilt also $|\beta| \leq \frac{\delta}{M C_P}$, so gilt die Ungleichung mit einem $\delta_0 > 0$.

Aufgabe 7

Schritt 1: Existenz einer Galerkin Approximation

Wie in der Vorlesung verwenden wir das Korollar aus dem Brouwer'schen Fixpunktsatz. Wir definieren die Abbildung:

$$v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ (d_1, \ldots, d_m) \mapsto \left(A \left(\sum_{j=1}^m d_j w_j, w_i \right) - \int_\Omega f w_i \, dx \right)_{i=1\ldots,m}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} v(d) \cdot d &= A \left(\sum_{j=1}^m d_j w_j, \sum_{j=1}^m d_j w_j \right) - \int_\Omega f \sum_{j=1}^m d_j w_j \, dx \\ &\overset{\text{Aufg. 6}}{\geq} \delta_0 \left\| \sum_{j=1}^m d_j w_j \right\|_{H_0^1}^2 - \mu_0 - \|f\|_{L^2} C_p \left\| \sum_{j=1}^m d_j w_j \right\|_{H_0^1} \\ &= \delta_0 |d|^2 - \mu_0 - \|f\|_{L^2} |d| \end{aligned}$$

wobei $\delta_0 > 0$. Somit folgt $v(d) \cdot d \geq 0$ für alle $|d| = R$ mit $R > 0$ genügend groß. Nach dem Korollar existiert ein $d^{(m)} \in B_R(0)$ mit $v(d^{(m)}) = 0$. Die Galerkin Approximation ist dann gegeben durch

$$u_m = \sum_{j=1}^m d_j^{(m)} w_j \in V_m$$

Schritt 2: Beschränktheit der Folge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $H_0^1(\Omega)$; Auswahl einer schwach konv. Teilfolge

Haben: $A(u_m, w_j) = \int_\Omega f w_j \, dx$ $(j = 1 \ldots, m)$. Multiplizieren mit $d_k^{(m)}$ und summieren ergibt (beachte: $v \mapsto A(u, v)$ linear für u fest):

$$(*) \quad A(u_m, u_m) = \int_\Omega f u_m \, dx.$$

Wie in der Vorlesung erhalten wir für $\varepsilon > 0$:

$$\int_\Omega f u_m \, dx \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_{L^2}^2 + \varepsilon C_P \|u_m\|_{H_0^1}^2$$

und mit Aufgabe 6 und $(*)$ folgt:

$$\delta_0 \|u_m\|_{H_0^1}^2 - \mu_0 \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_{L^2}^2 + \varepsilon C_P \|u_m\|_{H_0^1}^2$$

Mit $\varepsilon := \frac{\delta_0}{2C_P}$ folgt

$$\|u_m\|_{H_0^1}^2 \leq \tfrac{2\mu}{\delta_0} + \tfrac{1}{\delta_0^2 C_P} \|f\|_{L^2}^2.$$

Da $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist in $H_0^1(\Omega)$, existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$.

Schritt 3: Grenzübergang $j \to \infty$

(i) Wegen ii) ist $\left(a(\nabla u_{m_j})\right)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\left(L^2(\Omega)\right)^n$ und somit existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(u_{m_{j_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $a(\nabla u_{m_{j_l}}) \rightharpoonup \xi$ in $\left(L^2(\Omega)\right)^n$, d.h. $\int_\Omega a(\nabla u_{m_{j_l}})\cdot\psi\,dx \to \int_\Omega \xi\psi\,dx$ für alle $\psi\in\left(L^2(\Omega)\right)^n$. Insbesondere gilt

$$\int_\Omega a(\nabla u_{m_{j_l}})\cdot\nabla\phi\,dx \to \int_\Omega \xi\cdot\nabla\phi\,dx \quad \text{für alle } \phi\in H_0^1(\Omega).$$

Da $u_{m_{j_l}} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ und die Einbettung $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist, gilt $u_{m_{j_l}}\to u$ in $L^2(\Omega)$.

Beachte: Ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}\in L^2(\Omega)$, $g_k\to g\in L^2(\Omega)$, so existiert eine Teilfolge $(g_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $G\in L^2(\Omega)$, so dass $g_{k_j}\to g$ punktweise fast überall und $|g_{k_j}|\le G$.

Wir können nun also eine weitere Teilfolge, die wir $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nennen, von $(u_{m_{j_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ auswählen mit den Eigenschaften:

$v_j\rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$, $v_j\to u$ in $L^2(\Omega)$, $v_j\to u$ punktweise fast überall in Ω, $|v_j|\le V$ für ein $V\in L^2(\Omega)$ und $\int_\Omega a(\nabla v_j)\cdot\nabla\phi\,dx\to\int_\Omega\xi\cdot\nabla\phi\,dx$ für alle $\phi\in H_0^1(\Omega)$.

(ii) Für jedes $l\in\mathbb{N}$ ex. $j_0=j_0(l)\in\mathbb{N}$ mit

$$A(v_j,w_l)=\int_\Omega f w_l\,dx \quad \text{für alle } j\ge j_0.$$

Insb. gilt $A(v_j,w_l)\to\int_\Omega f w_l\,dx$ $(j\to\infty)$. Weiterhin gilt:

- $\int_\Omega a(\nabla v_j)\cdot\nabla w_l\,dx\to\int_\Omega\xi\cdot\nabla w_l\,dx$ $(j\to\infty)$ (s.o.)
- $\int_\Omega b_i(v_j)(\partial_i v_j)w_l\,dx \to \int_\Omega b_i(u)(\partial_i u)w_l\,dx$ $(j\to\infty)$ (ohne Beweis, ähnlich wie in (iii))
- $\int_\Omega c(v_j)w_l\,dx\to\int_\Omega c(u)w_l\,dx$ $(j\to\infty)$ (ohne Beweis, ähnlich wie in (iii)).

Somit folgt

$$\int_\Omega f w_l = \lim_{j\to\infty} A(v_j,w_l) = \int_\Omega\left[\xi\cdot\nabla w_l+\beta\sum_{i=1}^n b_i(u)(\partial_i u)w_l + c(u)w_l\right]dx$$

für alle $l\in\mathbb{N}$. Da $\{w_1,w_2,\ldots\}$ eine ONB von $H_0^1(\Omega)$ ist, folgt die Eigenschaft (ii)

(iii) Beh. 1: $\int_\Omega b_i(v_j)(\partial_i v_j)v_j\,dx\to\int_\Omega b_i(u)(\partial_i u)u\,dx$ $(j\to\infty)$
Bew.:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega b_i(v_j)(\partial_i v_j)v_j\,dx-\int_\Omega b_i(u)(\partial_i u)u\,dx\right|\\
&\le\left|\int_\Omega(\partial_i v_j-\partial_i u)b_i(u)u\,dx\right|+\int_\Omega|\partial_i v_j||b_i(v_j)v_j-b_i(u)u|\,dx\\
&\le\left|\int_\Omega(\partial_i v_j-\partial_i u)b_i(u)u\,dx\right|+\|v_j\|_{H_0^1}\left(\int_\Omega|b_i(v_j)v_j-b_i(u)u|^2\,dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $\phi\mapsto\int_\Omega(\partial_i\phi)b_i(u)u\,dx$ ist ein beschränktes lineares Funktional auf $H_0^1(\Omega)$ und somit konvergiert der erste Term gegen 0, da $v_j\rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$. Da $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $H_0^1(\Omega)$, ist der Integrand des zweiten Terms beschränkt durch $4\|b_i\|_\infty^2(V^2+u^2)\in L^1(\Omega)$ und konvergiert punktweise fast überall gegen 0. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt die Konvergenz des Integrals gegen 0.

Beh. 2: $\int_\Omega c(v_j)v_j\,dx \to \int_\Omega c(u)u\,dx$.
Bew:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega c(v_j)v_j\,dx - \int_\Omega c(u)u\,dx\right| &\le \int_\Omega |c(v_j)-c(u)||v_j|\,dx + \int_\Omega |c(u)||v_j-u|\,dx \\ &\le \left(\int_\Omega |c(v_j)-c(u)|^2\,dx\right)^{1/2} \|v_j\|_{L^2} + \|c\|_\infty |\Omega|^{1/2}\|v_j-u\|_{L^2}\end{aligned}$$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz sowie $v_j \to u$ in $L^2(\Omega)$ folgt die Behauptung.

Insgesamt folgt nun

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_\Omega a(\nabla v_j)\cdot\nabla v_j\,dx &= \lim_{j\to\infty}\left[A(v_j,v_j) - \beta\sum_{i=1}^n b_i(v_j)(\partial_i v_j)v_j\,dx - \int_\Omega c(v_j)v_j\,dx\right] \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{j\to\infty}\left[\int_\Omega f v_j\,dx - \beta\sum_{i=1}^n b_i(v_j)(\partial_i v_j)v_j\,dx - \int_\Omega c(v_j)v_j\,dx\right] \\ &= \int_\Omega f u\,dx - \beta\sum_{i=1}^n b_i(u)(\partial_i u)u\,dx - \int_\Omega c(u)u\,dx \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \int_\Omega \xi\cdot\nabla u\,dx\end{aligned}$$

(iv) Für alle $\phi \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{j\to\infty}\int_\Omega (a(\nabla v_j)-a(\nabla\phi))\cdot(\nabla v_j - \nabla\phi)\,dx \\ &= \int_\Omega \xi\cdot\nabla u\,dx - \int_\Omega a(\nabla\phi)\nabla u\,dx + \int_\Omega \xi\cdot\nabla\phi\,dx + \int_\Omega a(\nabla\phi)\cdot\nabla\phi\,dx \\ &= \int_\Omega (\xi - a(\nabla\phi))\cdot(\nabla u - \nabla\phi)\,dx\end{aligned}$$

Mit Aufgabe 5 c) folgt $\xi = a(\nabla u)$ und mit der Gleichung aus Schritt (ii) folgt

$$A(u,\phi) = \int_\Omega f\phi\,dx \quad \text{für alle } \phi \in H_0^1(\Omega).$$