Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
3. Übungsblatt

Aufgabe 8

Betrachten Sie das parabolische Randwertproblem aus der Vorlesung auf dem Intervall $[0, t_0]$. Zeigen Sie, dass die Funktion u, die aus den "lokalen" Lösungen u_k auf $[(k-1)t_1, kt_1]$ zusammengesetzt ist, eine Lösung des gegebenen Problems auf $[0, t_0]$ ist.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst für $T > 0$, $u \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega)^m) \cap H^1((0,T), H^{-1}(\Omega)^{(m)})$ und $\varphi \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega)^m)$ die Formel

$$\int_0^T \int_\Omega u(x,t)\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt = -\int_0^T \tfrac{\partial u}{\partial t}(t)\,[\varphi(\cdot,t)]\,dt + \int_\Omega u(x,T)\varphi(x,T)\,dx - \int_\Omega u(x,0)\varphi(x,0)\,dx.$$

Aufgabe 9

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

a) Die Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erfülle die Lipschitz-Bedingung

$$|f(x,z_1,p_1) - f(x,z_2,p_2)| \leq L_1|z_1 - z_2| + L_2|p_1 - p_2|$$

für alle $x \in \Omega,\ z_1, z_2 \in \mathbb{R},\ p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$. Weiter gelte $f(x,0,0) \in L^2(\Omega)$. Unter welchen geeigneten hinreichenden Bedingungen an L_1, L_2 besitzt das Randwertproblem

$$-\Delta u = f(x,u,\nabla u) \ \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ auf } \partial\Omega$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$?

b) Es sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle die Wachstumsbedingung $|f(z)| \leq c(|z| + 1)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine hinreichende Bedingung für $\kappa > 0$ an, so dass das Randwertproblem

$$-\Delta u = \kappa f(u) \ \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ auf } \partial\Omega$$

eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Bitte wenden!

Aufgabe 10

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Betrachten Sie das nichtlineare Randwertproblem

$$(*) \qquad -\sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x,u,\nabla u) \ \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \ \text{ auf } \partial\Omega,$$

wobei f die in Aufgabe 9 a) genannten Eigenschaften besitzt und die Funktionen $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ eine symmetrische Matrix $A(x) := \left(a_{ij}(x)\right)_{i,j=1\dots,n}$ bilden. Weiter gelte $\xi^t A(x)\xi \geq \lambda|\xi|^2$ für ein $\lambda > 0$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

a) Geben Sie die schwache Formulierung des Problems $(*)$ an.

b) Zeigen Sie, dass das lineare Problem

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) = g \ \text{ in } \Omega \quad u = 0, \ \text{ auf } \partial\Omega$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt. Bestimmen Sie außerdem eine Konstante $c > 0$ (abhängig von λ und der Poincaré-Konstanten) mit $\|u\|_{H_0^1} \leq c\|g\|_{L^2}$.

c) Geben Sie eine hinreichende Bedingung für L_1, L_2 und λ an, so dass $(*)$ eine eindeutige schwache Lösung besitzt.

Besprechung in der Übung am 13.11.2013