Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 8

Sei $u \in \mathcal{H} := L^2((0,T), H_0^1(\Omega)^m) \cap H^1((0,T), H^{-1}(\Omega)^{(m)})$. Nach Vorlesung gilt $\mathcal{H} \subset C([0,T], L^2(\Omega))$, d.h. Äquivalenzklasse $[u]$ besitzt einen Repräsentanten in $C([0,T], L^2(\Omega))$.
Behauptung: Für $u \in \mathcal{H}$ und $\varphi \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega))$ gilt

$$\int_0^T \int_\Omega u(x,t) \tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt = -\int_0^T \tfrac{\partial u}{\partial t}(t)\,[\varphi(\cdot,t)]\;dt + \int_\Omega u(x,T)\varphi(x,T)\,dx - \int_\Omega u(x,0)\varphi(x,0)\,dx.$$

Bemerkung: $u(x,T)$ bzw. $u(x,0)$ sind durch die Auswahl des Repräsentanten in $C([0,T], L^2(\Omega))$ wohldefiniert.
Beweis: Nach Def. von $H^1((0,T), H^{-1}(\Omega)^{(m)})$ gilt wegen $u \in \mathcal{H}$:

$$\int_0^T \int_\Omega u(x,t) \tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt = \int_0^T \tfrac{\partial u}{\partial t}(t)\,[\varphi(\cdot,t)]\;dt \quad \text{für alle } \tilde{\varphi} \in C_0^1((0,T), H_0^1(\Omega)^m) \tag{1}$$

Für $\varepsilon > 0$ sei $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion mit den Eigenschaften $\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(\tau)\,d\tau = 1$ und $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset \{|\tau| \le \varepsilon\}$. Definiere

$$\theta_\varepsilon(z) := \begin{cases} 0, & x \in (0,\varepsilon] \\ \int_0^z \eta_\varepsilon(\tau - 2\varepsilon)\,d\tau, & x \in (\varepsilon, 3\varepsilon) \\ 1, & x \in [3\varepsilon, T-3\varepsilon] \\ 1 - \int_{T-3\varepsilon}^z \eta_\varepsilon(\tau - T + 2\varepsilon)\,d\tau, & z \in (T-3\varepsilon, T-\varepsilon) \\ 0, & z \in [T-\varepsilon, T) \end{cases}$$

θ_ε hat kompakten Träger in $(0,T)$ und somit folgt für $\varphi \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega)^m)$:
$\theta_\varepsilon\varphi \in C_0^1((0,T), H_0^1(\Omega)^m)$. Es gilt:

$$\int_0^T \int_\Omega u\,\tfrac{\partial(\theta_\varepsilon\varphi)}{\partial t}\,dx\,dt = \int_0^T \int_\Omega u\,\theta_\varepsilon'(t)\varphi\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega u\,\theta_\varepsilon(t)\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt$$

Wir untersuchen die Terme auf der rechten Seite für $\varepsilon \to 0$. Klar: $\theta_\varepsilon(t) \to 1$ punktweise in $(0,T)$. Wegen $u \in \mathcal{H}$ und $\varphi \in C_0^1((0,T), H_0^1(\Omega)^m)$ folgt $\int_\Omega u(x,t)\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx \in L^1((0,T))$ und somit (dom. Konvergenz)

$$\int_0^T \theta_\varepsilon(t) \left(\int_\Omega u(x,t) \tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx \right)\,dt \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_\Omega u(x,t)\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt.$$

Für den 2. Term definiere $v(t) = \int_\Omega u(x,t)\varphi(x,t)\,dx$. Es gilt $v \in C([0,T])$ und somit nach Definition von θ_ε:

$$\begin{aligned}\int_0^T v(t)\theta_\varepsilon'(t)\,dt &= \int_\varepsilon^{3\varepsilon} v(t)\theta_\varepsilon'(t)\,dt + \int_{T-3\varepsilon}^{T-\varepsilon} v(t)\theta_\varepsilon'(t)\,dt \\ &\overset{\text{MWS Int.}}{=} v(t_1)\underbrace{\int_\varepsilon^{3\varepsilon} \theta_\varepsilon'(t)\,dt}_{=1} + v(t_2)\underbrace{\int_{T-3\varepsilon}^{T-\varepsilon} \theta_\varepsilon'(t)\,dt}_{=1} \qquad (t_1 \in (\varepsilon, 3\varepsilon),\ t_2 \in (T-3\varepsilon, T-\varepsilon)) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \to 0} v(0) - v(T) = \int_\Omega u(x,0)\varphi(x,0)\,dx - \int_\Omega u(x,T)\varphi(x,T)\,dx\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\int_0^T \underbrace{\tfrac{\partial u}{\partial t}(t)}_{\in H^{-1}(\Omega)^{(m)}} [\theta_\varepsilon(t)\varphi(\cdot,t)]\,dt = \int_0^T \theta_\varepsilon(t)\tfrac{\partial u}{\partial t}(t)\,[\varphi(\cdot,t)]\ dt \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_0^T \tfrac{\partial u}{\partial t}(t)\,[\varphi(\cdot,t)]\ dt$$

Einsetzen von $\theta_\varepsilon\varphi$ in (1) und $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung.

Nach Konstruktion gilt für $u_k : ((k-1)t_1, kt_1) \to H_0^1(\Omega)$:

$$\tfrac{\partial u_k}{\partial t}(t)[\psi] + \int_\Omega \nabla u_k(x,t)\cdot\nabla\psi(x)\,dx = \int_\Omega f(u_k(x,t))\psi(x)\,dx \tag{2}$$
$$\text{für alle } \psi \in H_0^1(\Omega),\ \text{für fast alle } t \in ((k-1)t_1, kt_1) =: I_k$$

Definiere: $u : (0,T) \to H_0^1(\Omega)$ durch $u = u_k$ auf $\overline{I_k}$. Beachte: Nach Konstruktion gilt: $u_{k+1}(kt_1) = u_k(kt_1)$. Zeige: $u \in \mathcal{H}$ sowie

$$\tfrac{\partial u}{\partial t}(t)[\psi] + \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\psi(x)\,dx = \int_\Omega f(u(x,t))\psi(x)\,dx$$
$$\text{für alle } \psi \in H_0^1(\Omega),\ \text{für fast alle } t \in (0,T)$$

Wegen (2) genügt es zu zeigen: $u \in \mathcal{H}$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(t) = \frac{\partial u_k}{\partial t}(t)$ für fast alle $t \in I_k$.
Für alle $\tilde\varphi \in C_0^1((0,T), H_0^1(\Omega)^m)$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \tfrac{\partial\tilde\varphi}{\partial t}(x,t)u(x,t)\,dx\,dt &= \sum_{k=1}^p \int_{(k-1)t_1}^{kt_1}\int_\Omega \tfrac{\partial\tilde\varphi}{\partial t}(x,t)u_k(x,t)\,dx\,dt \\ &\overset{\text{Beh.}}{=} -\sum_{k=1}^p \int_{(k-1)t_1}^{kt_1} \tfrac{\partial u_k}{\partial t}(t)\,[\tilde\varphi(\cdot,t)]\ dt + \underbrace{\sum_{k=1}^p \int_\Omega \tilde\varphi(x,t)u_k(x,t)\,dx\Big|_{t=(k-1)t_1}^{kt_1}}_{=0,\ \text{da } u_k(kt_1)=u_{k+1}(kt_1) \text{ und } \tilde\varphi(\cdot,0)=\tilde\varphi(\cdot,T)} \\ &= \int_0^T \zeta\,[\tilde\varphi(\cdot,t)]\ dt,\end{aligned}$$

wobei $\zeta = \frac{\partial u_k}{\partial t}$ auf I_k gilt. Es folgt $\zeta \in L^2((0,T), H^{-1}(\Omega)^{(m)})$ und folglich $u \in \mathcal{H}$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_k}{\partial t}$ auf I_k.

Aufgabe 9

a) Bemerkung: Für jedes $g \in L^2(\Omega)$ besitzt das Problem

$$-\Delta u = g \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{3}$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.

Beweis: Das Funktional $H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\phi \mapsto \int_\Omega g\phi\,dx$ ist linear und beschränkt. Mit dem Riesz'schen Darstellungssatz folgt die Existenz einer eindeutigen Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi\,dx = \langle u, \phi\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega g\phi\,dx \quad \text{für alle } \phi \in H_0^1(\Omega),$$

d.h. u ist die eindeutige schwache Lösung des obigen Randwertproblems. Für $\phi = u$ gilt außerdem

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega gu\,dx \le \|g\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \le C_P\|g\|_{L^2}\|u\|_{H_0^1},$$

d.h. $\|u\|_{H_0^1} \le C_P\|g\|_{L^2}$. Hierbei bezeichne C_P die Poincaré-Konstante für das Gebiet Ω.

Definieren wir den Operator $T_0 : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, $g \mapsto u$, wobei u die eindeutige Lösung von (3) ist, so folgt T_0 ist linear und $\|T_0 g\|_{H_0^1} \le C_P\|g\|_{L^2}$.

Definiere nun den Opearator $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega),\ u \mapsto T_0(f(\cdot, u, \nabla u)$. Beachte: Für $u \in H_0^1(\Omega)$ ist $f(\cdot, u, \nabla u) \in L^2(\Omega)$, da

$$-|f(x,0,0)| + |f(x,u,\nabla u)| \le |f(x,0,0) - f(x,u,\nabla u)| \le L_1 u + L_2 \nabla u$$

und $f(\cdot, u, \nabla u), u, \nabla u \in L^2(\Omega)$.

Zeige: T ist eine Kontraktion (falls L_1, L_2 geeignet gewählt). Dann folgt: Der Operator T_0 besitzt einen eindeutigen Fixpunkt $u^* \in H_0^1(\Omega)$, d.h. $u^* = Tu^* = T_0(f(\cdot, u^*, \nabla u^*))$ und somit ist u^* schwache Lösung des gegebenen Problems.

Zeige die Kontraktionseigenschaft: Seien $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Dann:

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tv\|_{H_0^1} &= \|T_0(f(\cdot,u,\nabla u) - f(\cdot,v,\nabla v))\|_{H_0^1} \\
&\le C_P\|f(\cdot,u,\nabla u) - f(\cdot,v,\nabla v)\|_{L^2} \\
&\le C_P\|L_1|u-v| + L_2|\nabla u - \nabla v|\|_{L^2} \\
&\le C_P\left(L_1\|u-v\|_{L^2} + L_2\|u-v\|_{H_0^1}\right) \\
&\le \left(L_1 C_P^2 + L_2 C_P\right)\|u-v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

Gilt also $L_1 C_P^2 + L_2 C_P < 1$, so ist T eine Kontraktion in $H_0^1(\Omega)$.

b) Definiere

$$T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),\ u \mapsto ET_0(\kappa f(u))$$

wobei $E : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ die kompakte Einbettung bezeichne. Offenbar: u löst das RWP $\iff Tu = u$.

1) T erfüllt:

$$\begin{aligned}\|Tu\|_{L^2} &\leq C_P\|T_0(\kappa f(u))\|_{H_0^1} \\ &\leq C_P^2\|\kappa f(u)\|_{L^2} \\ &\leq \kappa c C_P^2\|1+|u|\|_{L^2} \\ &\leq \kappa c C_P^2\left(\sqrt{|\Omega|}+\|u\|_{L^2}\right)\end{aligned}$$

Ist $\kappa c C_P^2 < 1$ so gilt $T\left(\overline{B_r(0)}\right) \subset \overline{B_r(0)}$ für $r = \frac{\kappa c C_P^2\sqrt{|\Omega|}}{1-\kappa c C_P^2}$.

2) T ist kompakt, da E kompakt und T_0 beschränkt

3) T ist stetig. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$. Weiter sei $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge. Es gilt:

$$\|Tu_{n_j} - Tu\|_{L^2}^2 \leq \kappa C_P^2 \int_\Omega |f(u_{n_j}) - f(u)|^2\,dx$$

Wegen $u_{n_j} \to u$ in $L^2(\Omega)$ existiert eine Teilfolge $(u_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $u_{n_{j_k}} \to u$ punktweise fast überall in Ω. Die Stetigkeit von f impliziert $f(u_{n_{j_k}}) \to f(u)$ punktweise f.ü. in Ω und mit dem Satz von der dominierten Konvergenz (benutze Wachstumsbedingung an f und die Beschränktheit von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$) folgt:

$$\|Tu_{n_{j_k}} - Tu\|_{L^2} \to 0.$$

Somit besitzt jede Teilfolge von $(\|Tu_n - Tu\|_{L^2})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen 0 konvergiert. Damit folgt $\|Tu_n - Tu\|_{L^2} \to 0$, also die Stetigkeit von T.

Mit dem Fixpunktsatz von Schauder folgt die Existenz eines Fixpunktes in $\overline{B_r(0)}$ und somit die Existenz einer Lösung des Randwertproblems (für alle κ mit $\kappa c C_P^2 < 1$).

Aufgabe 10

a) Multiplizieren der Differentialgleichung mit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und partielle Integration liefern die schwache Formulierung: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega (\nabla u)^T A(x)\nabla\phi\,dx = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\phi\,dx \quad \text{für alle } \phi \in H_0^1(\Omega)$$

b) Definiere die Bilinearform

$$B[u,v] := \int_\Omega (\nabla u)^T A(x)\nabla v\,dx \quad (u,v \in H_0^1(\Omega))$$

B ist ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$: Die Definitheit folgt wegen $\xi^T A(x)\xi \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Mit dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert zu jedem $g \in L^2(\Omega)$ ein eindeutiges $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$B[u,\phi] = \int_\Omega g\phi\,dx$$

für alle $\phi \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Weiter gilt:

$$\lambda\|u\|_{H_0^1}^2 \leq B[u,u] = \int_\Omega gu\,dx \leq C_P\|g\|_{L^2}\|u\|_{H_0^1},$$

also gilt die gewünschte Ungleichung mit $c = \frac{C_P}{\lambda}$.

c) Definiere

$$T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega),\ u \mapsto T_1(f(x,u,\nabla u))$$

wobei $T_1 : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ der Lösungsoperator des linearen Problems aus dem b)-Teil ist. Mit b): $\|T_1 g\|_{H_0^1} \leq \frac{C_P}{\lambda}\|g\|_{L^2}$. Damit folgt für $u, v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tv\|_{H_0^1} &= \|T_1(f(\cdot,u,\nabla u)) - T_1(f(\cdot,v,\nabla v))\|_{H_0^1} \\
&\leq \tfrac{C_P}{\lambda}\|f(\cdot u,\nabla u) - f(\cdot, v\nabla v)\|_{L^2} \\
&\leq \tfrac{C_P}{\lambda}\|L_1|u-v| + L_2|\nabla u - \nabla v|\|_{L^2} \\
&\leq \tfrac{C_P}{\lambda}\left(L_1\|u-v\|_{L^2} + L_2\|u-v\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq \tfrac{L_1 C_P^2 + L_2 C_P}{\lambda}\|u-v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

Somit ist T eine Kontraktion auf $H_0^1(\Omega)$, falls $L_1 C_P^2 + L_2 C_P < \lambda$ gilt und die Behauptung folgt wie in Aufgabe 9.