Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
4. Übungsblatt

Aufgabe 11

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Carathéodory-Funktion, d.h. $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig für fast alle $x \in \Omega$ und $f(\cdot, t) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar für fast alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter bezeichnen $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ die Eigenwerte des Problems $-\Delta u = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Es gelte $f(\cdot, t_0) \in L^2(\Omega)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ sowie entweder

a) Es existieren $L, \varepsilon > 0$ mit $-L \leq \frac{f(x,s)-f(x,t)}{s-t} \leq \lambda_1 - \varepsilon$ für alle $s, t \in \mathbb{R}, s \neq t$ und fast alle $x \in \Omega$

oder

b) Es existieren $\varepsilon > 0, i \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_i + \varepsilon \leq \frac{f(x,s)-f(x,t)}{s-t} \leq \lambda_{i+1} - \varepsilon$ für alle $s, t \in \mathbb{R}, s \neq t$ und fast alle $x \in \Omega$

Beweisen Sie, dass das Randwertproblem

$$-\Delta u = f(x, u) \text{ in } \Omega \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Operator $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $g \mapsto w$, wobei w die eindeutige Lösung des Problems $-\Delta u - \nu u = g$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ (für $\nu \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$) ist, stetig ist mit $\|K\| \leq \frac{1}{\min\{|\lambda_i - \nu|,\ i \in \mathbb{N}\}}$. Betrachten Sie dann für ein geeignet gewähltes $\nu \in \mathbb{R}$ die Funktion $g(x, t) = f(x, t) - \nu t$ und den Operator $K \circ G$ mit $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),\ u \mapsto g(\cdot, u)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 12

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. $A : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n,n}$ sei eine symmetrische Matrixfunktion mit den Eigenschaften:

(i) Es existieren Konstanten $0 < a_0 \leq a_1$ mit $a_0 I \leq A(x,y) \leq a_1 I$ für alle $x \in \Omega, y \in \mathbb{R}$

(ii) $A(\cdot, y)$ ist messbar für alle $y \in \mathbb{R}$, $A(x, \cdot)$ ist stetig für fast alle $x \in \Omega$

Weiter sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es existiere ein $C > 0$ mit $|f(z)| \leq C(1 + |z|)$ für alle $z \in \mathbb{R}$ sowie $CC_P^2 < a_0$. Hierbei beizeichne C_P die Poincaré-Konstante des Gebietes Ω.
Beweisen Sie, dass das Randwertproblem

$$-\mathrm{div}(A(\cdot, u)\nabla u) = f(u) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 13

Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1\}$. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$-\Delta u = 1 + u^2 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt, indem Sie geeignete Ober- und Unterlösungen in $H_0^1(\Omega)$ konstruieren.

Aufgabe 14

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C^1([0, \infty))$ beschränkt. Weiter gelte $f(0) = 0$ sowie $f'(0) > \lambda_1$, wobei λ_1 der kleinste Eigenwert von $-\Delta u = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ sei. Verwenden Sie die Methode der Ober- und Unterlösungen, um die Existenz einer positiven Lösung des Problems

$$-\Delta u = f(u) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

zu beweisen.

Besprechung in der Übung am 20.11.2013