Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 11

Es gilt: Es existiert eine ONB von $L^2(\Omega)$ aus Eigenfunktionen des Problems $-\Delta u = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$, bezeichne diese mit $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset H_0^1(\Omega)$. Jede Funktion $u \in L^2(\Omega)$ lässt sich schreiben als

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2} \varphi_i.$$

Behauptung: Sei $\nu \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$. Das Randwertproblem

$$(+) \quad -\Delta u - \nu u = g \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

besitzt eine eindeutige Lösung $w = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\langle g, \varphi_i \rangle_{L^2}}{\lambda_i - \nu} \varphi_i$ und der Operator $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), g \mapsto w$ ist stetig mit $K \leq \frac{1}{\min\{|\lambda_i - \nu|,\ i \in \mathbb{N}\}}$.
Beweis: Sei w eine Lösung von $(+)$. Setze φ_i, $i \in \mathbb{N}$ in die schwache Formulierung ein. Dann folgt

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi_i \, dx}_{= \int_\Omega \lambda_i w \varphi_i = \lambda_i \langle w, \varphi_i \rangle_{L^2}} - \underbrace{\int_\Omega \nu w \varphi_i \, dx}_{= \nu \langle w, \varphi_i \rangle_{L^2}} = \underbrace{\int_\Omega g \varphi_i \, dx}_{= \langle g, \varphi_i \rangle_{L^2}} \qquad (i \in \mathbb{N}),$$

d.h. $\langle w, \varphi_i \rangle_{L^2} = \frac{1}{\lambda_i - \nu} \langle g, \varphi_i \rangle_{L^2}$. Mit der obigen Darstellung folgt der erste Teil der Behauptung. Wir verwenden nun noch Parseval, um die Norm von K abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \|Kg\|_{L^2}^2 = \|w\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle w, \varphi_i \rangle_{L^2}|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle g, \varphi_i \rangle_{L^2}|^2}{|\lambda_i - \nu|^2} \\ &\leq \frac{1}{\min\{|\lambda_i - \nu|^2,\ i \in \mathbb{N}\}} \sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, \varphi_i \rangle_{L^2}| = \frac{1}{\min\{|\lambda_i - \nu|^2,\ i \in \mathbb{N}\}} \|g\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Nun zum Beweis der Existenz einer schwachen Lösung des Problems

$$-\Delta u = f(x, u) \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \tag{1}$$

Aus $a \leq \frac{f(x,s) - f(x,t)}{s-t} \leq b$ folgt $|f(x,s) - f(x,t)| \leq \max\{|a|, |b|\}|s-t|$ und $|f(x,s)| \leq |f(x,t)| + \max\{|a|, |b|\}|s-t|$ (für alle $s, t \in \mathbb{R}$, für fast alle $x \in \Omega$). Insbesondere folgt aus $u \in L^2(\Omega)$ auch $f(\cdot, u) \in L^2(\Omega)$ (benutze hierbei $f(\cdot, t_0) \in L^2(\Omega)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$).
Setze im Fall a) $\nu = \frac{\lambda_1 - \varepsilon - L}{2}$, und im Fall b) $\nu = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{2}$. Weiter sei $g(x,t) := f(x,t) - \nu t$. Dann:

a) $\underbrace{-L-\nu}_{=-\frac{\lambda_1-\varepsilon+L}{2}} \leq \frac{g(x,s)-g(x,t)}{s-t} \leq \underbrace{\lambda_1-\nu-\varepsilon}_{=\frac{\lambda_1-\varepsilon+L}{2}}$ für alle $s,t \in \mathbb{R}, s \neq t$, für fast alle $x \in \Omega$

b) $\underbrace{\lambda_i+\varepsilon-\nu}_{=\frac{\lambda_i+\varepsilon-\lambda_{i+1}}{2}} \leq \frac{g(x,s)-g(x,t)}{s-t} \leq \underbrace{\lambda_{i+1}-\nu-\varepsilon}_{=\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_i-\varepsilon}{2}}$ für alle $s,t \in \mathbb{R}, s \neq t$, für fast alle $x \in \Omega$

Definiere nun $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $u \mapsto g(\cdot, u)$. Dann ist G Lipschitz-stetig mit

$$\|G(u)-G(v)\|_{L^2} \leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda_1-\varepsilon+L}{2}\|u-v\|_{L^2} & \text{Fall a)} \\ \frac{\lambda_{i+1}-\varepsilon-\lambda_i}{2}\|u-v\|_{L^2} & \text{Fall b)} \end{array} \right\} \text{für alle } u,v \in L^2(\Omega).$$

Definiere nun $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $u \mapsto K \circ G(u)$. Dann gilt: u löst (1) $\iff$ $u = T(u)$. Zeige: T ist Kontraktion.

a) $\|K\| = \frac{2}{\lambda_1+\varepsilon+L}$, denn $\lambda_i - \nu \geq \lambda_1 - \nu = \frac{\lambda_1+\varepsilon+L}{2} > 0$. Also

$$\|Tu-Tv\|_{L^2} \leq \|K\|\|G(u)-G(v)\|_{L^2} \leq \underbrace{\frac{\lambda_1-\varepsilon+L}{\lambda_1+\varepsilon+L}}_{<1}\|u-v\|_{L^2} \quad \text{für alle } u,v \in L^2(\Omega)$$

b) $\|K\| = \frac{2}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}$, denn $\lambda_j - \nu \leq \lambda_i - \nu = \frac{\lambda_i-\lambda_{i+1}}{2} < 0$ für $j \leq i$ und $\lambda_j - \nu \geq \lambda_{i+1} - \nu \geq \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_i}{2} > 0$ für $j \geq i+1$. Also

$$\|Tu-Tv\|_{L^2} \leq \|K\|\|G(u)-G(v)\|_{L^2} \leq \underbrace{\frac{\lambda_{i+1}-\varepsilon-\lambda_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}}_{<1}\|u-v\|_{L^2} \quad \text{für alle } u,v \in L^2(\Omega)$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau eine Lösung $u^* \in L^2(\Omega)$ von $T = K \circ G$. Da Bild $K \subset H_0^1(\Omega)$, ist u^* schwache Lösung von (1).

Aufgabe 12

Sei $u \in L^2(\Omega)$. Mit (i) und (ii) folgt: $A(\cdot,u) \in L^\infty(\Omega)^{n,n}$. Weiter gilt $f(u) \in L^2(\Omega)$, da $\|f(u)\|_{L^2} \leq C\|1+|u|\|_{L^2} \leq C(\sqrt{|\Omega|} + \|u\|_{L^2})$ und Ω beschränkt. Somit besitzt das Problem

$$\int_\Omega (\nabla w)^T A(\cdot,u)\nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f(u)\varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{2}$$

eine eindeutige schwache Lösung $w \in H_0^1(\Omega)$. Definiere

$$T_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \\ u & \mapsto & w \end{array} \right.$$

Weiter sei $E : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ die kompakte Einbettung von $H_0^1(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$. Wie in der Vorlesung sei $T = E \circ T_0 : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Wir zeigen: T ist stetig und kompakt.

Stetigkeit

Es sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $L^2(\Omega)$. Wie in der Vorlesung folgt: Es ex. eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $u_{k_j}(x) \to u(x)$ fast überall in Ω und

$$A(\cdot, u_{k_j}) \to A(\cdot,u) \quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{3}$$

Sei nun $w_j := T_0(u_{k_j})$ $(j \in \mathbb{N})$. Mit (i) und (2) folgt (wähle $\varphi = w_j$ als Testfunktion):

$$\begin{aligned} a_0\|\nabla w_j\|_{L^2}^2 &\overset{\text{(i)}}{\leq} \int_\Omega (\nabla w_j)^T A(\cdot, u_{k_j})\nabla w_j \, dx \overset{(2)}{=} \int_\Omega f(u_{k_j}) w_j \, dx \leq \|f(u_{k_j})\|_{L^2}\|w_j\|_{L^2} \\ &\leq C_P C(\sqrt{|\Omega|} + \|u_{k_j}\|_{L^2})\|\nabla w_j\|_{L^2} \end{aligned}$$

Da $u_{k_j} \to u$ in $L^2(\Omega)$, ist $\big(\|u_{k_j}\|_{L^2}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. es existiert $M > 0$ mit $\|u_{k_j}\|_{L^2} \leq M$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Also

$$\|\nabla w_j\|_{L^2} \leq \frac{C_P C}{a_0}(\sqrt{|\Omega|} + M) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

d.h. $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $H_0^1(\Omega)$. Somit existiert eine Teilfolge (wieder mit $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bezeichnet) mit:

$$w_j \rightharpoonup w \in H_0^1(\Omega) \quad \text{in } H_0^1(\Omega).$$

Wie in der Vorlesung folgt daraus:

$$\nabla w_j \rightharpoonup \nabla w \quad \text{in } L^2(\Omega)^n$$

und wir erhalten für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega (\nabla w_j)^T \underbrace{A(\cdot, u)\nabla\varphi}_{=:\xi\in L^2(\Omega)^n} \, dx = \langle \nabla w_j, \xi\rangle_{L^2} \to \langle \nabla w, \xi\rangle_{L^2} = \int_\Omega (\nabla w)^T A(\cdot, u)\nabla\varphi \, dx. \tag{5}$$

Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt nun

$$\begin{aligned} &\Big| \int_\Omega (\nabla w_j)^T A(\cdot, u)\nabla\varphi \, dx - \underbrace{\int_\Omega (\nabla w_j)^T A(\cdot, u_{k_j})\nabla\varphi \, dx}_{=\int_\Omega f(u_{k_j})\varphi \, dx \text{ wg.(2) u. } w_j = T_0(u_{k_j})} \Big| \\ &\leq \underbrace{\|\nabla w_j\|_{L^2}}_{\text{beschr. wg. (4)}} \underbrace{\|A(\cdot, u) - A(\cdot, u_{k_j})\|_{L^2}}_{\to 0 \text{ wg. (3)}} \|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Weiter gilt wegen $u_{k_j} \to u$ in $L^2(\Omega)$ sowie dem Satz von der domierten Konvergenz:

$$\left| \int_\Omega f(u_{k_j})\varphi \, dx - \int_\Omega f(u)\varphi \, dx \right| \to 0,$$

da f stetig und $\|f(u_{k_j}) - f(u)\|_{L^2}$ beschränkt. Mit (5) folgt

$$\int_\Omega (\nabla w)^T A(\cdot, u)\nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f(u)\varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und mit einem Dichtheitsargument für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Es folgt $w = T_0 u$, sowie $T_0(u_{k_j}) = w_j \rightharpoonup w = T_0 u$ in $H_0^1(\Omega)$ und da E kompakt, impliziert dies die starke Konvergenz von $ET_0(u_{k_j}) \to ET_0(u)$ in $L^2(\Omega)$. Mit dem üblichen Teilfolgenargument folgt $T(u_k) \to T(u)$ in $L^2(\Omega)$.

Kompaktheit

Es sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $L^2(\Omega)$, $w_k = T_0(u_k)$. Wie oben folgt:

$$\|\nabla w_k\|_{L^2} \leq \frac{C_P C}{a_0}(\sqrt{|\Omega|} + M) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

d.h. $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $H_0^1(\Omega)$. Da E kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(w_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $Ew_{k_j} = ET_0(u_{k_j}) = T(u_{k_j})$ ist konvergent in $L^2(\Omega)$.

Anwedung des FPS von Schauder

Zusatzvoraussetzung: $\frac{CC_P^2}{a_0} < 1$. Definiere $\alpha := \frac{\sqrt{|\Omega|}CC_P^2}{a_0 - CC_P^2} > 0$ und $D := \{u \in L^2(\Omega): \ \|u\|_{L^2} \leq \alpha\}$. D ist nichtleer, abgeschlossen, konvex und beschränkt. Zeige: $T(D) \subset D$. Sei $u \in D$ und $w = Tu$. Dann gilt wie oben:

$$\frac{a_0}{C_P^2}\|w\|_{L^2}^2 \leq \|f(u)\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \leq C(\sqrt{|\Omega|} + \|u\|_{L^2})\|w\|_{L^2} \leq C(\sqrt{|\Omega|} + \alpha)\|w\|_{L^2}$$

also

$$\|w\|_{L^2} \leq \frac{C_P^2 C}{a_0}\left(\sqrt{|\Omega|} + \frac{\sqrt{|\Omega|}CC_P^2}{a_0 - CC_P^2}\right) = \frac{\sqrt{|\Omega|}CC_P^2}{a_0 - CC_P^2} = \alpha.$$

Mit dem FPS von Schauder folgt, dass T einen Fixpunkt $u \in D$ besitzt, d.h. $u = T(u) = T_0 u \in H_0^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega (\nabla u)^T A(\cdot, u)\nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f(u)\varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Aufgabe 13

Die Funktion $\underline{u} = 0$ ist eine Unterlösung, da $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und

$$-\Delta\underline{u} = 0 \leq 1 + \underline{u}^2 \ \text{ in } \Omega, \quad \underline{u} \leq 0 \ \text{ auf } \partial\Omega.$$

Definiere $\overline{u}(x,y) := 1 - x^2 - y^2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt $\overline{u}|_{\partial\Omega} \geq 0$ und wegen

$$-\Delta\overline{u} = 4 \geq 1 + (1 - x^2 - y^2)^2 = 1 + \overline{u}^2 \quad \text{in } \Omega$$

ist $\overline{u}$ eine Oberlösung. Da $\underline{u}, \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$ und $\underline{u} \leq \overline{u}$ in Ω, existiert nach Vorlesung eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ fast überall in Ω.

Aufgabe 14

Sei $\varphi_1 > 0$ die Eigenfunktion zum ersten Eigenwert λ_1 und $\underline{u} = \alpha\varphi_1$ mit $\alpha > 0$. $f'(0) > \lambda_1$ impliziert $f'(z) > \lambda_1$ für alle $z \in (0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ genügend klein. Es folgt für alle $z \in (0, \varepsilon)$:

$$f(z) - \underbrace{f(0)}_{=0} = f'(\xi)z > \lambda_1 z.$$

Wähle $\alpha > 0$ so, dass $\alpha\|\varphi_1\|_\infty < \varepsilon$. Dann folgt:

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\cdot\nabla\phi \, dx = \int_\Omega \lambda_1\alpha\varphi_1\phi \, dx < \int_\Omega f(\alpha\varphi_1)\phi \, dx = \int_\Omega f(\underline{u})\phi \, dx, \quad \text{für alle } \phi \in H_0^1(\Omega), \phi \geq 0 \text{ in } \Omega$$

Es sei $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung des Problems

$$-\Delta u = \|f\|_\infty \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

$\overline{u} = u_1 + \alpha\|\varphi_1\|_\infty$ ist eine Oberlösung, da $\overline{u} \geq 0$ auf $\partial\Omega$ und für alle $\phi \in H_0^1(\Omega),\ \phi \geq 0$ in Ω, gilt (beachte: mit dem Maximumprinzip folgt $u_1 \geq 0$ in Ω, also auch $\overline{u} \geq 0$ in Ω):

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega \|f\|_\infty \phi \, dx \geq \int_\Omega f(\overline{u})\phi \, dx.$$

Wegen $\underline{u} = \alpha\varphi_1 = u_1 + \alpha\|\varphi_1\|_\infty \leq \overline{u}$ folgt mit der Methode der Ober- und Unterlösungen die Existenz einer schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $0 < \alpha\varphi_1 \leq u \leq \overline{u}$ in Ω.

Bemerkung: Auch ohne das Maximumprinzip kann man beweisen, dass $u_1 \geq 0$ in Ω gilt. Wende dazu die Methode der Ober- und Unterlösungen auf das Problem

$$(**) \qquad -\Delta u = \|f\|_\infty \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

an. Eine Unterlösung ist offenbar gegeben durch $\underline{u}^* = 0$.
Konstruktion einer Oberlösung. Sei $R > 0$ und $x_0 \in \Omega$ so, dass $\overline{\Omega} \subset B_R(x_0)$. Löse

$$-\Delta\overline{u}^* = \|f\|_\infty \text{ in } B_R(x_0), \quad \overline{u}^* = 0 \text{ auf } \partial B_R(x_0)$$

Es gilt: $\overline{u}^* = \|f\|_\infty \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{2n} > 0$ in $\overline{\Omega}$, also ist $\overline{u}^*$ eine Oberlösung von $(**)$. Wegen $\underline{u}^* \leq \overline{u}^*$ folgt die Existenz einer Lösung u_1^* von $(**)$ mit $\underline{u}^* \leq u_1^* \leq \overline{u}^*$. Da die Lösung des linearen Problems eindeutig ist, gilt $u_1 = u_1^*$ und somit $0 \leq u_1$.