Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
5. Übungsblatt

Aufgabe 15

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet und λ_1 der kleinste Eigenwert des Problems $-\Delta u = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Betrachten Sie für $c > 0$ das Problem

$$(P_c) \quad \begin{cases} -\Delta u &= u(c-u) \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Für $c > \lambda_1$ existiert eine positive und beschränkte Lösung von (P_c).

b) Für $c \in [0, \lambda_1]$ existiert keine nichttriviale Lösung mit $u \geq 0$ in Ω.

Aufgabe 16

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und für $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gelte: Es existieren $c > 0, \beta > 0$, so dass $|f(z)| \leq c|z|^{\beta+1}$ für alle $z \in [0, \infty)$. Weiter sei $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T))$ eine positive Lösung von

$$u_t - \Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega, \quad u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0$$

mit $\lim_{t \to T^-} \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_\infty^\beta \, ds = \infty$. Beweisen Sie nacheinander die folgenden Aussagen

a) $\psi_p'(t) \leq 2cp\|u(\cdot, t)\|_\infty^\beta \psi_p(t)$, wobei $\psi_p(t) := \int_\Omega u(x, t)^{2p} \, dx$ und $p > 1$.

b) $\psi_p(t) \leq \psi_p(0) \exp\left(2cp \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_\infty^\beta \, ds\right)$.

c) $\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, 0)\|_\infty \exp\left(c \int_0^t \|u(\cdot, s)\|_\infty^\beta \, ds\right)$.

Folgern Sie nun: $T \geq (c\beta\|u(\cdot, 0)\|_\infty^\beta)^{-1}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 17

Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

a) Geben Sie hinreichende Bedingungen für f an, so dass $F(\cdot, u), G(\cdot, u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$, wobei

$$F(x,z) = \int_0^z f(x,s)\,ds, \qquad G(x,z) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,z).$$

b) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$ eine klassische Lösung von

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

und $F(\cdot, u), G(\cdot, u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie die folgende Version der Pohozaev Identität:

$$\frac{n-2}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \big(nF(x,u(x)) + G(x,u(x))\big)\,dx$$

c) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(*) \qquad -\Delta u = \lambda |u|^{p-2}u + \mu |u|^{q-2}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

wobei $p, q > 1$. Testen Sie die Gleichung mit u und verwenden Sie b), um hinreichende Bedingungen an p, q, λ, μ zu finden, die Nichtexistenz von nichttrivialen klassischen Lösungen $u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$ der Gleichung $(*)$ implizieren.

Besprechung in der Übung am 27.11.2013