Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 15

a) Sei $c > \lambda_1$. $\overline{u} \equiv c$ ist Oberlösung von (P_c), da $\overline{u} \geq 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla\phi \, dx = 0 = \int_\Omega \overline{u}(\overline{u} - c)\phi \, dx \quad \text{für alle } \phi \in H_0^1(\Omega), \phi \geq 0$$

Für eine Unterlösung wähle $\underline{u} = t\varphi_1$, wobei φ_1 positive Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 ist. Es gilt: $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$. Wähle $t = \frac{c-\lambda_1}{\|\varphi_1\|_\infty}$. Offenbar gilt $\underline{u}|_{\partial\Omega} = 0$ und weiter für alle $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$:

$$\int_\Omega \underline{u}(c - \underline{u})\phi \, dx = \int_\Omega t\varphi_1(c - t\varphi_1)\phi \, dx = \int_\Omega t\Big(c - \underbrace{(c - \lambda_1)}_{\geq 0}\underbrace{\tfrac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|_\infty}}_{\leq 1}\Big)\varphi_1\phi \, dx$$

$$\geq \int_\Omega t\lambda_1\varphi_1\phi \, dx = \int_\Omega t\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega \nabla\underline{u} \cdot \nabla\phi \, dx$$

Wegen $\underline{u} = (c - \lambda_1)\frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|_\infty} \leq c - \lambda_1 \leq c = \overline{u}$ folgt die Existenz einer schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

b) Sei $c \in [0, \lambda_1]$. Für jede schwache Lösung mit $u \geq 0, u \not\equiv 0$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega u(c - u)u \, dx = \int_\Omega cu^2 - u^3 \, dx \leq c\int_\Omega u^2 \, dx$$

Weiter:

$$c \leq \lambda_1 = \min_{\phi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^2 \, dx}{\int_\Omega \phi^2 \, dx} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \, dx} \leq c$$

Also muss $c = \lambda_1$ gelten (im Fall $c < \lambda_1$ erhalten wir jetzt schon den Widerspruch) und $u = \alpha\varphi_1$ mit $\alpha \geq 0$.

Setze $u = \alpha\varphi_1$ in die schwache Formulierung ein: Für alle $\phi \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \alpha\varphi_1(\lambda_1 - \alpha\varphi_1)\phi \, dx = \int_\Omega \alpha\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega \alpha\lambda_1\varphi_1\phi \, dx$$

Es muss also gelten: $\lambda_1 = \lambda_1 - \alpha\varphi_1$, was nur für $\alpha = 0$ möglich ist. Dann folgt $u \equiv 0$, Widerspruch.

Aufgabe 16

Setze $g(t) := \|u(\cdot,t)\|_\infty^\beta$.

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\psi_p'(t) &= \int_\Omega 2pu(x,t)^{2p-1}u_t\,dx \\
&= \int_\Omega 2pu(x,t)^{2p-1}(\Delta u + f(u))\,dx \\
&= \int_\Omega 2pu(x,t)^{2p-1}\underbrace{f(u)}_{\leq c|u|^{\beta+1}}\,dx - \underbrace{2p(2p-1)\int_\Omega |\nabla u|^2 u(x,t)^{2p-2}\,dx}_{\geq 0} \\
&\leq 2cp\int_\Omega u(x,t)^{2p+\beta}\,dx \\
&\leq 2cp\|u(\cdot,t)\|_\infty^\beta \psi_p(t)
\end{aligned}$$

b) Beachte: Aus $y'(x) \leq \tilde{f}(x)$ folgt $y(x) \leq y(0) + \int_0^x \tilde{f}(s)\,ds$ für $x \geq 0$. Mit a) erhalten wir zunächst

$$\frac{d}{dt}\left(\log(\psi_p(t))\right) = \frac{1}{\psi_p(t)}\psi_p'(t) \leq 2cpg(t)$$

und somit

$$\log\psi_p(t) \leq \log(\psi_p(0)) + 2cp\int_0^t g(s)\,ds \quad\Rightarrow\quad \psi_p(t) \leq \psi_p(0)\exp\left(2cp\int_0^t g(s)\,ds\right).$$

c) Ziehe aus der Ungleichung in b) die $2p$-te Wurzel und betrachte $p \to \infty$ ($\|u\|_p \to \|u\|_\infty$!):

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq \|u(\cdot,0)\|_\infty \exp\left(c\int_0^t g(s)\,ds\right) \iff g(t) \leq g(0)\exp\left(\beta c\int_0^t g(s)\,ds\right)$$

Wegen $-\frac{1}{\beta c}\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\beta c\int_0^t g(s)\,ds\right)\right) = g(t)\exp\left(-\beta c\int_0^t g(s)\,ds\right)$ folgt

$$-\frac{1}{\beta c}\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\beta c\int_0^t g(s)\,ds\right)\right) \leq g(0)$$

und ähnlich wie oben ($y'(x) \geq \tilde{f}(x) \Rightarrow y(x) \geq y(0) + \int_0^x \tilde{f}(s)\,ds$):

$$\exp\left(-\beta c\int_0^t g(s)\,ds\right) \geq 1 - \beta ctg(0)$$

Für $t \to T^-$ konvergiert die linke Seite gegen 0 und wir erhalten:

$$0 \geq 1 - \beta cTg(0) \iff T \geq \frac{1}{\beta c\|u(\cdot,0)\|_\infty^\beta}.$$

Aufgabe 17

a) Sobolev'scher Einbettungssatz (hier nur $n \geq 3$): $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ ist stetig für alle $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$, d.h. es ex. $C > 0$: $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ für alle $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Eine hinreichende Bedingung ist z.B. $f(x,z) = f(z)$ und $|f(z)| \leq c\left(|z| + |z|^{\frac{n+2}{n-2}}\right)$. Dann folgt: $G(x,z) = 0$ und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,u(x))|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_0^{u(x)} f(x,s)\,ds\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{|u(x)|} c\left(s + s^{\frac{n+2}{n-2}}\right)\,ds\,dx \\ &= \tfrac{c}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2\,dx + c\tfrac{n-2}{2n}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx \\ &= \tfrac{c}{2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + c\tfrac{n-2}{2n}\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Eine weitere Bedingung ist gegeben durch

$$|f(x,z)|, |\nabla_x f(x,z)||x| \leq \sum_{k=1}^{m_1} |z|^{\alpha_k} g_k(x) + \sum_{k=1}^{m_2} |z|^{\beta_k} h_k(x)$$

wobei $0 < \alpha_k \leq \frac{n+2}{n-2}$, $g_k \in L^{\frac{2n}{n+2-\alpha_k(n-2)}}(\mathbb{R}^n)$ sowie $0 < \beta_k \leq 1$, $h_k \in L^{\frac{2}{1-\beta_k}}(\mathbb{R}^n)$. Dann:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,u(x))|\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{|u(x)|} \sum_{k=1}^{m_1} s^{\alpha_k}|g_k(x)| + \sum_{k=1}^{m_2} s^{\beta_k}|h_k(x)|\,ds\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{m_1} \tfrac{1}{\alpha_k+1}\int_{\mathbb{R}^n} |g_k(x)||u(x)|^{\alpha_k+1}\,dx + \sum_{k=1}^{m_2} \tfrac{1}{\beta_k+1}\int_{\mathbb{R}^n} |h_k(x)||u(x)|^{\beta_k+1}\,dx\end{aligned}$$

Hölder für das erste Integral mit $\tilde{p} = \frac{2n}{n+2-\alpha_k(n-2)}$, $\tilde{q} = \frac{2n}{n-2+\alpha_k(n-2)}$ ($\Rightarrow \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$): $g_k \in L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)$ nach Voraussetzung und wegen $(\alpha_k+1)\tilde{q} = \frac{2n}{n-2}$: $u \in L^{(\alpha_k+1)\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)$.

Hölder für das zweite Integral mit $\tilde{p} = \frac{2}{1-\beta_k}$ und $\tilde{q} = \frac{2}{\beta_k+1}$. Dann $h_k \in L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)$ und $(\beta_k+1)\tilde{q} = 2$ sowie $u \in L^{(\beta_k+1)\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)$.

Betrachte $G(x,u(x))$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G(x,u(x))|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{|u(x)|} \underbrace{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,s)\right|}_{\leq |x||\nabla_x f(s,x)|}\,ds\,dx$$

Mit der gegebenen Abschätzung erhält man das gleiche Integral wie oben und somit $G(\cdot,u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

b) Es gilt die folgende Identität (beachte: u erfüllt $-\Delta u = f(x,u)$ in $\mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\tfrac{|\nabla u|^2}{2}x - \langle x, \nabla u\rangle\nabla u - xF(x,u)\right) &= \tfrac{n}{2}|\nabla u|^2 + x^T D^2 u\nabla u - |\nabla u|^2 - x^T D^2 u \nabla u \\ &\quad - \langle x,\nabla u\rangle\Delta u - nF(x,u) - \langle x,\nabla u\rangle f(x,u) - G(x,u) \\ &= \tfrac{n-2}{2}|\nabla u|^2 - nF(x,u) - G(x,u)\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Gauß folgt ($r > 0$):

$$\begin{aligned}
&\left| \tfrac{n-2}{2} \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{B_r} \left(nF(x,u) + G(x,u) \right) \, dx \right| \\
&\qquad = \left| \int_{\partial B_r} \left(\tfrac{|\nabla u|^2}{2} x - \langle x, \nabla u \rangle \nabla u - xF(x,u) \right) \cdot \nu \, d\sigma \right| \\
&\qquad \overset{x=\nu r}{\leq} r \int_{\partial B_r} \left(\tfrac{1}{2} |\nabla u|^2 + |\nabla u|^2 + |F(x,u)| \right) \, d\sigma \to 0 \quad (r \to \infty)
\end{aligned}$$

Angenommen, die letzte Aussage wäre falsch, so gilt: Es ex. $C > 0$ und $r_0 \in (0, \infty)$ mit

$$r \int_{\partial B_r} \left(\tfrac{3}{2} |\nabla u|^2 + |F(x,u)| \right) \, d\sigma \geq C \quad \text{für alle } r \geq r_0.$$

Dann:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\tfrac{3}{2} |\nabla u|^2 + |F(x,u)| \right) \, dx = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} \left(\tfrac{3}{2} |\nabla u|^2 + |F(x,u)| \right) \, d\sigma \, dr \geq \int_{r_0}^\infty \tfrac{C}{r} \, dx = \infty$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $F(\cdot, u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

c) In diesem Fall haben wir

$$f(x,u) = \lambda |u|^{p-2} u + \mu |u|^{q-2} u, \quad F(x,u) = \tfrac{\lambda}{p} |u|^p + \tfrac{\mu}{q} |u|^q, \quad G(x,u) = 0$$

Damit die Voraussetzungen von b) erfüllt sind, fordere z.B. $1 \leq p, q \leq \frac{2n}{n-2}$ (siehe a)). Mit b) folgt dann:

$$\tfrac{n-2}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx = \tfrac{n\lambda}{p} \|u\|_p^p + \tfrac{n\mu}{q} \|u\|_q^q.$$

Testen der Differentialgleichung mit u liefert:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx = \lambda \|u\|_p^p + \mu \|u\|_q^q$$

Also

$$0 = \lambda \underbrace{\left(\tfrac{n}{p} - \tfrac{n-2}{2} \right)}_{=m_1} \|u\|_p^p + \mu \underbrace{\left(\tfrac{n}{q} - \tfrac{n-2}{2} \right)}_{=m_2} \|u\|_q^q$$

Insbesondere gilt: Ist u eine nichttriviale Lösung, so müssen die Faktoren λm_1 und μm_2 entweder beide Null sein, oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Wegen $1 \leq p, q < \frac{2n}{n-2}$ müssen dann μ und λ umgekehrtes Vorzeichen besitzen. In den Fällen $\lambda, \mu < 0$ oder $\lambda, \mu > 0$ existieren also keine nichttrivialen Lösungen.