Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
6. Übungsblatt

Aufgabe 18

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das in jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine innere Kugelbedingung erfüllt, und sei

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

mit $a_{ij}, b_i, c \in C(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, n$ und $c \geq 0$ in Ω. Weiter gelte

1. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $i, j = 1, \ldots, n$
2. Zu jedem $x \in \Omega$ existieren $\lambda(x), \Lambda(x) > 0$ mit

$$\lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n$$

3. Es existiert $d > 0$ mit $|b_i(x)|, |c(x)|, \Lambda(x) \leq d\lambda(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Beweisen Sie:

a) (Hopf's Lemma) Seien $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und $x_0 \in \partial\Omega$ mit

$$Lu \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

sowie

$$u(x_0) \leq 0,\ u(x_0) < u(x) \ \text{ für alle } x \in \Omega \cap B_r(x_0)$$

mit $r > 0$ genügend klein. Dann gilt $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$.

Hinweis: Zu $x_0 \in \partial\Omega$ sei $B_R(z) \subset \Omega$ eine offene Kugel mit $x_0 \in \partial B_R(z)$. Betrachten Sie auf $A := B_R(z)\backslash\overline{B_r(z)}$ $(0 < r < R)$ die Funktion $v(x) = \delta(e^{-\alpha|x-z|^2} - e^{-\alpha R^2})$ und wählen Sie δ, α, r so, dass das schwache Maximumprinzip $u(x) - u(x_0) \leq v(x)$ für alle $x \in \overline{A}$ impliziert.

b) (Starkes Maximum Prinzip) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und es gelte $Lu \geq 0$ in Ω. Falls $\inf_\Omega u \leq 0$ und falls ein $x^* \in \Omega$ mit $u(x^*) = \inf_\Omega u$ existiert, so ist u konstant.

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $M_1 = \{x \in \Omega :\ u = \inf_\Omega u\}$ und $M_2 = \{x \in \Omega :\ u > \inf_\Omega u\}$. Nehmen Sie an, dass $M_2 \neq \emptyset$ gilt und konstruieren Sie eine Kugel K in M_2 mit $\partial K \cap M_1 \neq \emptyset$. Wenden Sie a) auf K an.

Bitte wenden!

c) Es sei nun Ω beschränkt, und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ erfülle $Lu \geq 0$ in Ω sowie $u \geq 0$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie mit Hilfe von a), b) die folgende Alternative: Entweder

i) $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$ oder

ii) $u > 0$ in Ω, und falls $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) = 0$ existiert, so folgt $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$.

Aufgabe 19

Beweisen Sie, dass die Aussage in Satz V.3 auch dann noch gültig ist, falls die Vorausstzung $u > 0$ in $\Omega = B_1(0)$ ersetzt wird duch $u \geq 0,\ u \not\equiv 0$ in Ω und zusätzlich $f(0) \geq 0$ gilt.

Aufgabe 20

1971 publizierte James Serrin im Archive for Rational Mechanics and Analysis (Volume 43, Number 4) in seinem Artikel "A Symmetry Problem in Potential Theory" u.a. den folgenden Satz:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-glattem Rand und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung des überbestimmten Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = c & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

($c < 0$ konstant). Dann ist Ω eine Kugel um ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $-nc$, und $u(x) = \frac{1}{2n}\left((nc)^2 - |x - x_0|^2\right)$.
In seinem Beweis wird die Methode der Spiegelungen an Hyperebenen benutzt.
In der gleichen Ausgabe dieses Journals, direkt im Anschluss an Serrins Artikel, veröffentlichte Hans F. Weinberger einen weiteren Beweis des obigen Satzes ("Remark on the preceding paper of Serrin"). Er zeigt dabei zunächst, dass die Lösung u die oben genannte Form haben muss und folgert daraus, dass Ω eine Kugel ist.
Wir werden im Folgenden den Beweis von Weinberger nachvollziehen:

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der Pohozaev-Identität:

$$c^2 n|\Omega| = (n+2)\int_\Omega u\,dx.$$

(ii) Beweisen Sie, dass $|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u$ subharmonisch in Ω ist. Mit Hilfe des Maximumprinzips und (i) können Sie nun zeigen, dass $|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u \equiv c^2$ in Ω gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Lösung u von der Form $u = \frac{1}{2n}(R^2 - |x - x_0|^2)$ ist und bestimmen Sie R.

Besprechung in der Übung am 4.12.2013