Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 18

a) Es sei $x_0 \in \partial\Omega$ und $B_R(z) \subset \Omega$ eine Kugel mit $x_0 \in \partial B_R(z)$ (existiert wg. der inneren Kugelbed.). O.B.d.A. gilt $u(x_0) < u(x)$ für alle $x \in B_R(z)$ (wähle R genügend klein). Sei $r < R$ und $A := B_R(z) \setminus \overline{B_r(z)}$ ein Kreisring. Betrachte die Funktion $v(x) = \delta\left(e^{-\alpha|x-z|^2} - e^{-\alpha R^2}\right)$, wobei $\delta > 0$ und $\alpha > 0$ so gewählt sind, dass gilt

$$4\alpha^2 r^2 - 2\alpha d - 2d\alpha\sqrt{n}R - d > 0$$

$$\delta := \min_{y \in \partial B_r(z)} (u(y) - u(x_0)) \left(e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}\right)^{-1}$$

Ziel: Zeige mit Hilfe des schwachen Maximumprinzips: $u(x) - u(x_0) \geq v(x)$ in $\overline{A}$.

Für alle $x \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}
Lv &= -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\tfrac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\tfrac{\partial v}{\partial x_i} + c(x)v \\
&= -\delta \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(4\alpha^2(x_i - z_i)(x_j - z_j) - 2\alpha\delta_{ij})e^{-\alpha|x-z|^2} \\
&\quad - \delta \sum_{i=1}^n 2\alpha b_i(x)(x_i - z_i)e^{-\alpha|x-z|^2} + \delta c(x)e^{-\alpha|x-z|^2} \\
&= \delta e^{-\alpha|x-z|^2}\left[-4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(x_i - z_i)(x_j - z_j) + 2\alpha \sum_{i=1}^n a_{ii}(x)\right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n 2\alpha b_i(x)(x_i - z_i) + c(x)\right] \\
&\leq \delta e^{-\alpha|x-z|^2}\left[-4\alpha^2\lambda(x)|x-z|^2 + 2\alpha\Lambda(x) + 2\alpha|b(x)||x-z| + c(x)\right] \\
&\leq \delta e^{-\alpha r^2}\left[-4\alpha^2\lambda(x)r^2 + 2\alpha d\lambda(x) + 2\alpha d\sqrt{n}\lambda(x)R + d\lambda(x)\right] \\
&\leq \delta\lambda(x)e^{-\alpha r^2}\left[-4\alpha^2 r^2 + 2\alpha d + 2d\alpha\sqrt{n}R + d\right] < 0
\end{aligned}$$

Die Funktion $w(x) := u(x) - u(x_0) - v(x)$ erfüllt

$$Lw = Lu - c(x)u(x_0) - Lv \geq Lu - Lv > 0 \;\; \text{in } A.$$

Weiter gilt aufgrund der Wahl von δ:

$$x \in \partial B_r(z) \;\Rightarrow\; w(x) \geq \min_{y \in \partial B_r(z)} (u(y) - u(x_0)) - v(x) = 0$$
$$x \in \partial B_R(z) \;\Rightarrow\; w(x) = u(x) - u(x_0) + 0 \geq 0$$

Mit dem schwachen Maximumprinzip folgt $w \geq 0$ in $\overline{A}$, d.h. $u(x) - u(x_0) \geq v(x)$ auf $\overline{A}$. Wegen $w(x_0) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup_{t \to 0^+} \frac{w(x_0) - w(x_0 - t\nu(x_0))}{t} \\ &= \limsup_{t \to 0^+} \frac{u(x_0) - u(x_0 - t\nu(x_0)) - (v(x_0) - v(x_0 - t\nu(x_0)))}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + 2\delta\alpha R > \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \end{aligned}$$

b) Es gelte $M_1 := \{x \in \Omega : u(x) = \inf_\Omega u\} \neq \emptyset$. Sei $x^1 \in M_1$. Offenbar gilt $\Omega = M_1 \cup M_2$ mit $M_2 := \{x \in \Omega : \; u(x) > \inf_\Omega u\}$. Wir nehmen an, dass $M_2 \neq \emptyset$ gilt.

Sei also $x^2 \in M_2$. Ω ist wegzusammenhängend, da Ω offen und zusammenhängend. Es existiert somit ein stetiger Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x^2$ und $\gamma(1) = x^1$. Sei weiter

$$t_0 := \sup\{t \in [0,1] : \; \gamma(t) \in M_2\} > 0$$

Da γ stetig ist, existiert $t_1 < t_0$ (nahe bei t_0), so dass $|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| < \operatorname{dist}(\gamma([0,1]), \partial\Omega)$. Sei nun

$$z := \gamma(t_1), \quad r := \operatorname{dist}(\gamma(t_1), M_1)$$

Es gilt:

i) $B_r(z) \subset \Omega$ und $B_r(z) \subset M_2$ da für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - z| < r$ gilt:

$$|x - z| \leq |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| < \operatorname{dist}(\gamma([0,1]), \partial\Omega) \leq \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$$

ii) Es existiert ein Punkt $x_0 \in \partial B_r(z)$ mit $x_0 \in M_1$. Weiter gilt $u(x_0) = \inf_\Omega u < u(x)$ für alle $x \in B_r(z)$.

Die Voraussetzungen des Hopf'schen Lemma sind erfüllt. Somit existiert ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ (äußere Einheitsnormale an $B_r(z)$, so dass $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$. Andererseits nimmt u in x_0 ein lokales Minimum an, es gilt also $\nabla u(x_0) = 0$, Widerspruch. Es folgt $M_2 = \emptyset$.

c) Da Ω beschränkt ist, wird $m := \min_{\overline{\Omega}} u$ in $\overline{\Omega}$ angenommen. Betrachte die folgenden Fälle:

α) $m \leq 0$ und m wird in Ω angenommen. Das starke Maximumprinzip impliziert, dass u konstant ist. Wegen $u \geq 0$ auf $\partial\Omega$ folgt $u \equiv 0$ und (i) gilt

β) $m \leq 0$ und m wird nicht in Ω angenommen. Dann ex. ein Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) \leq 0$ und $u(x_0) < u(x)$ für alle $x \in \Omega$. Aus den Randbedingungen folgt $u(x_0) = 0$, so dass $u > 0$ in Ω folgt und das Hopf Lemma kann wieder angewandt werden. Es gilt (ii).

γ) $m > 0$. Dann gilt $u > 0$ in $\overline{\Omega}$, d.h. (ii) gilt

Aufgabe 19

Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) \geq 0$, $u \geq 0$ in Ω, $u \not\equiv 0$ Lösung von

$$-\Delta u = f(u) \ \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ auf } \partial\Omega,$$

so folgt direkt $u > 0$.
Beweis:

$$-\Delta u = f(u) \geq f(u) - f(0) = \underbrace{\int_0^1 f'(tu)\,dt}_{=:c(x)} \, u \overset{u \geq 0}{\geq} c^-(x)u$$

wobei $c^-(x) = \min\{c(x), 0\}$ für $x \in \Omega$. Es folgt

$$-\Delta u - c^-(x)u \geq 0 \geq 0 \ \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ auf } \partial\Omega$$

Da $-c^- \geq 0$ in Ω folgt wegen $u \not\equiv 0$ und dem starken Maximumprinzip $u > 0$ in Ω. Damit sind die ursprünglichen Voraussetzungen von Satz V.3 erfüllt.

Aufgabe 20

(i) Pohozaev-Identität:

$$\tfrac{n-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \tfrac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\tfrac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 (x \cdot \nu)\,d\sigma = \int_\Omega nF(u)\,dx$$

mit $F(y) = \int_0^y f(t)\,dt$. Wegen $f(u) = 1$ folgt $F(u) = u$ und mit $\frac{\partial u}{\partial \nu} = c$ sowie $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega u\,dx$ (schwache Formulierung des Problems mit u als Testfunktion) gilt:

$$\tfrac{n-2}{2} \int_\Omega u\,dx + \tfrac{1}{2}c^2 \underbrace{\int_{\partial\Omega} x \cdot \nu\,d\sigma}_{=\int_\Omega \operatorname{div}(x)\,dx = n|\Omega|} = n \int_\Omega u\,dx$$

also

$$c^2 n|\Omega| = (n+2) \int_\Omega u\,dx$$

(ii) Mit Cauchy-Schwarz folgt:

$$(*) \quad 1 = (\Delta u)^2 \leq n \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}^2 \leq n \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2$$

Weiter gilt (beachte höhere Regularität von u im Inneren wg. Regularitätstheorie)

$$
\begin{aligned}
\Delta(|\nabla u|^2 + \tfrac{2}{n}u) &= \Delta(|\nabla u|^2) + \tfrac{2}{n}\underbrace{\Delta u}_{=-1} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n u_{x_j}^2\right)_{x_i x_i} - \tfrac{2}{n} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(2u_{x_j x_i}^2 + 2u_{x_j} u_{x_j x_i x_i}\right)\right) - \tfrac{2}{n} \\
&= 2\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 - \tfrac{2}{n} + 2\sum_{j=1}^n u_{x_j} \underbrace{\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i x_j}}_{=(\Delta u)_{x_j}=0} \\
&= 2\left(\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 - \tfrac{1}{n}\right) \overset{(*)}{\geq} 0.
\end{aligned}
$$

Es gilt also $-\Delta(|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u) \leq 0$ in Ω und $|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u \leq c^2$ auf $\partial\Omega$. Mit dem Maximumprinzip folgt:

$$|\nabla u|^2 + \tfrac{2}{n}u \leq c^2 \quad \text{in } \Omega.$$

Integrieren über Ω ergibt:

$$(**)\ \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}_{=\int_\Omega u\,dx} + \int_\Omega \tfrac{2}{n}u\,dx \leq \int_\Omega c^2\,dx = c^2|\Omega| \overset{(i)}{=} \tfrac{n+2}{n}\int_\Omega u\,dx$$

Nimmt $|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u$ sein Maximum c^2 im Inneren von Ω an, so folgt $|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u \equiv c^2$. Dieser Fall muss eintreten, da sonst $|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u < c^2$ in Ω, im Widerspruch zu $(**)$.

(iii) Aus (ii) folgt: $\Delta(|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u) = 0$, d.h. $\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 - \frac{1}{n} = 0$, also gilt in $(*)$ Gleichheit:

$$1 = n\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}^2 = n\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2$$

und es folgt $u_{x_i x_j} = 0$ für $i \neq j$.

Gleichheit in Cauchy-Schwarz-Ungl. bedeutet außerdem lineare Abhängigkeit der Vektoren, d.h. es ex. $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(u_{x_1 x_1}, \ldots, u_{x_n x_n}) = \lambda(1, \ldots, 1)$ und wegen $-\Delta u = 1$ folgt $u_{x_i x_i} = -\frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$. Insgesamt erhalten wir:

$$u_{x_i x_j} = -\tfrac{1}{n}\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

und somit

$$u(x) = \tfrac{1}{2n}\left(R^2 - |x - x_0|^2\right)$$

wobei $R \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ zunächst beliebig. Offenbar gilt $u(x) = 0$ nur falls $|x - x_0|^2 = R^2$, es muss also gelten $\Omega = B_{|R|}(x_0)$. Für $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\tfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u \cdot \nu = \nabla u \cdot \tfrac{x - x_0}{R} = -\tfrac{1}{n}\tfrac{|x - x_0|^2}{R} = -\tfrac{R}{n} \overset{\text{Randbed.}}{=} c.$$

Also: $R = -nc$.