Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
7. Übungsblatt

Aufgabe 21

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $A \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ symmetrisch, $b \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, $c \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ mit $c \geq 0$ und $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Weiter existiere $\alpha > 0$, so dass $\xi^T A(x)\xi \geq \alpha|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$ gilt, sowie eine Funktion $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\nabla\psi = A^{-1}b$.
Betrachten Sie das nichtlineare Randwertproblem

$$(*)\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x)\cdot\nabla u + c(x)u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Substituieren Sie $u = e^{\tilde{\psi}}v$ und finden Sie eine Lagrange-Funktion L, so dass v die Euler-Lagrange-Gleichung des zugehörigen Funktionals löst.

Aufgabe 22

Eine Kette mit konstanter Massendichte wird an zwei Punkten $(-a, b)$ und (a, b) aufgehängt $(a, b > 0)$. Das zugehörige Variationsproblem, d.h. die Minimierung der potentiellen Energie, ist dann gegeben durch:

$$\text{Minimiere} \quad \int_{-a}^{a} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Dabei sei die Kette parametrisiert durch $(x, y(x))$ mit $x \in (-a, a)$.

a) Zeigen Sie: Ist $y_0(x)$ Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung so gilt:

$$H(x) = y_0'(x)\frac{\partial L}{\partial p}(y_0'(x), y_0(x)) - L(y_0'(x), y_0(x)) = const = c.$$

Hierbei ist $L(p, q) = q\sqrt{1 + p^2}$.

b) Finden Sie mit Hilfe von a) eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung.

Bitte wenden!

Aufgabe 23

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $h \in C(\partial\Omega)$. Betrachten Sie das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + \frac{n}{2}\frac{|\nabla u|^2}{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= h \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Finden Sie eine zugehörige Lagrange-Funktion und schreiben Sie das Problem in variationeller Formulierung.

Aufgabe 24

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Bestimmen Sie für die gegebenen Funktionale die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen:

a) $J[u] = \int_\Omega \left[\frac{(\Delta u)^2}{2} - F(x,u)\right] dx$, wobei $F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\,ds$.

b) $J[u] = \int_\Omega \left((\Delta u)^2 - |D^2 u|^2\right) u\,dx$, wobei $|D^2 u|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \left(\partial_{ij}^2 u\right)^2$.

Beachten Sie: Im Gegensatz zur Vorlesung hängt die Lagrange-Funktion hier zusätzlich von der Hessematrix $D^2 u$ ab.

Besprechung in der Übung am 11.12.2013