Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 21

Sei $\tilde\psi \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(A\nabla(e^{\tilde\psi}v)) &= \operatorname{div}(A\nabla\tilde\psi v e^{\tilde\psi} + A\nabla v e^{\tilde\psi}) \\
&= \operatorname{div}(A\nabla\tilde\psi e^{\tilde\psi})v + (\nabla v)^T A\nabla\tilde\psi e^{\tilde\psi} + \operatorname{div}(A\nabla v)e^{\tilde\psi} + (\nabla\tilde\psi)^T A\nabla v e^{\tilde\psi} \\
&= e^{\tilde\psi}\left[\operatorname{div}(A\nabla v) + 2(\nabla v)^T A\nabla\tilde\psi + \operatorname{div}(A\nabla\tilde\psi e^{\tilde\psi})v e^{-\tilde\psi}\right] \\
b\cdot\nabla(e^{\tilde\psi}v) &= b\cdot\nabla\tilde\psi\, e^{\tilde\psi}v + b\cdot\nabla v\, e^{\tilde\psi} \\
&= e^{\tilde\psi}\left[b\cdot\nabla\tilde\psi\, v + b\cdot\nabla v\right]
\end{aligned}$$

Wähle $\tilde\psi = \frac{1}{2}\psi$. Dann folgt $2A\nabla\tilde\psi = A\nabla\psi = b$, also $2(\nabla v)^T A\nabla\tilde\psi = b\cdot\nabla v$.
Wir erhalten somit folgende Gleichung für v:

$$-\operatorname{div}(A\nabla v) + \tilde c(x)v = \tilde f(x,v),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\tilde c(x) &= c(x) + b(x)\cdot\nabla\tilde\psi - \operatorname{div}(A\nabla\tilde\psi e^{\tilde\psi})e^{-\tilde\psi} \\
\tilde f(x,v) &= e^{-\tilde\psi} f(x, e^{\tilde\psi}v)
\end{aligned}$$

Definiere $\tilde F(x,q) := \int_0^q \tilde f(x,t)\,dt$. Das zugehörige Funktional ist gegeben durch

$$I(v) := \int_\Omega \tfrac{1}{2}\left((\nabla v)^T A\nabla v) + \tilde c(x)v^2\right) - \tilde F(x,v)\,dx$$

und die Lagrange-Funktion ist

$$L(p,q,x) = \tfrac{1}{2}p^T A p + \tfrac{1}{2}\tilde c(x)q^2 - \tilde F(x,q).$$

Aufgabe 22

o.B.d.A. gelte $y(x) > 0$ für alle $x \in (-a,a)$ (Wähle Aufhängungspunkte hoch genug). Mit $L(p,q) = q\sqrt{1+p^2}$ lautet die Euler-Langrange-Gleichung:

$$-\left(\tfrac{\partial L}{\partial p}(y',y)\right)' + \tfrac{\partial L}{\partial q}(y',y) = 0 \quad \text{in } (-a,a)$$

Betrachte
$$H(x) = y'(x)\tfrac{\partial L}{\partial p}(y'(x), y(x)) - L(y'(x), y(x)).$$
Es gilt:
$$\begin{aligned} H'(x) &= y''\tfrac{\partial L}{\partial p}(y', y) - y'\left(\tfrac{\partial L}{\partial p}(y', y)\right)' - \tfrac{\partial L}{\partial p}(y', y)y'' - \tfrac{\partial L}{\partial q}(y', y)y' \\ &= y'\left(\left(\tfrac{\partial L}{\partial p}(y', y)\right)' - \tfrac{\partial L}{\partial q}(y', y)\right) \overset{\text{Euler-Langrange}}{=} 0 \end{aligned}$$
Also folgt $H(x) = const = c$. Setze nun $L(p, q) = q\sqrt{1 + p^2}$ in die Definition von H ein:
$$\begin{aligned} & H(x) = y'\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}}y' - y\sqrt{1 + (y')^2} = c \\ \iff & \underbrace{(y')^2 y - y(1 + (y')^2)}_{=-y} = c\sqrt{1 + (y')^2} \qquad (\Rightarrow c < 0,\ \text{da } y > 0) \\ \implies & y^2 = c^2(1 + (y')^2) \\ \implies & y' = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c^2} = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{-c} \\ \overset{\text{TdV}}{\implies} & \underbrace{\int \frac{-c}{\sqrt{y^2 - c^2}}\, dy}_{=\int \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}}\, dy} = \int 1\, dx = x + \tilde{c} \\ & \text{Substituiere: } -\tfrac{y}{c} = \cosh t \ \Rightarrow \ \sqrt{\tfrac{y^2}{c^2} - 1} = \sinh t,\ \tfrac{dy}{dt} = -c\sinh t \\ \implies & \int \tfrac{-c\sinh t}{\sinh t}\, dt = -ct = -c\operatorname{arcosh}\left(-\tfrac{y}{c}\right) \overset{!}{=} x + \tilde{c} \\ \implies & y(x) = |c|\cosh\left(\tfrac{x + \tilde{c}}{|c|}\right) \end{aligned}$$
Randbedingungen: $y(a) = y(-a) = b \iff |c|\cos\left(\frac{a+\tilde{c}}{|c|}\right) = |c|\cos\left(\frac{-a+\tilde{c}}{|c|}\right) = b$. Es folgt $\tilde{c} = 0$ und
$$\tfrac{b}{a} = \tfrac{|c|}{a}\cosh\left(\tfrac{a}{|c|}\right)$$
Definiere $g(x) = \frac{1}{|x|}\cosh(|x|)$, $(x < 0)$ und $x_0 := \min_{x<0} g(x) \approx 1.50888$. Gilt $\frac{b}{a} < x_0$, so existiert keine Lösung (durch eine entsprechend große Wahl von b kann dieser Fall verhindert werden: Es ist nicht entscheidend, in welcher Höhe die Kette hängt!).

Aufgabe 23

Multipliziere die Gleichung mit $2v^{-n}$:
$$\begin{aligned} & -2v^{-n}\Delta v + nv^{-n-1}|\nabla v|^2 = 0 \\ \iff & -2v^{-n}\Delta v - nv^{-n-1}|\nabla v|^2 + 2nv^{-n-1}|\nabla v|^2 = 0 \\ \iff & -nv^{-n-1}|\nabla v|^2 - \operatorname{div}(2v^{-n}\nabla v) = 0 \end{aligned}$$
Setze $L(p, q) = q^{-n}|p|^2$, d.h. $L(\nabla v, v) = v^{-n}|\nabla v|^2$. Dann gilt:
$$\tfrac{\partial L}{\partial p}(\nabla v, v) = 2v^{-n}\nabla v, \quad \tfrac{\partial L}{\partial q}(\nabla v, v) = -nv^{-n-1}|\nabla v|^2.$$

Als variationelle Formulierung des Problems erhalten wir: Minimiere $I(u) := \int_\Omega u^{-n}|\nabla u|^2\,dx$ ($u = h$ auf $\partial\Omega$).

Aufgabe 24

a) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und u ein Minimierer. Dann gilt $J'[u+t\varphi]|_{t=0} = 0$. Es gilt:

$$J[u+t\varphi] = \int_\Omega \tfrac{1}{2}(\Delta u + t\Delta\varphi)^2 - F(x, u+t\varphi)\,dx$$

Also

$$J'[u+t\varphi] = \int_\Omega (\Delta u + t\Delta\varphi)\Delta\varphi - f(x, u+t\varphi)\varphi\,dx$$

$t = 0$:

$$\int_\Omega \Delta u\Delta\varphi - f(x,u)\varphi\,dx = 0 \iff \int_\Omega \left[\Delta(\Delta u) - f(x,u)\right]\varphi\,dx = 0$$

Euler-Langrange-Gleichung: $\Delta\Delta u = f(x,u)$ in Ω.

b) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und u ein Minimierer. Dann gilt $J'[u+t\varphi]|_{t=0} = 0$. Es gilt:

$$J[u+t\varphi] = \int_\Omega \left((\Delta u + t\Delta\varphi)^2 - |D^2 u + tD^2\varphi|^2\right)(u+t\varphi)\,dx$$

und

$$\begin{aligned} J'[u+t\varphi] = \int_\Omega &\left(2(\Delta u + t\Delta\varphi)\Delta\varphi - \sum_{i,j=1}^n 2(u_{x_ix_j} + t\varphi_{x_ix_j})\varphi_{x_ix_j}\right)(u+t\varphi) \\ &+ \left((\Delta u + t\Delta\varphi)^2 - |D^2u + tD^2\varphi|^2\right)\varphi\,dx \end{aligned}$$

$t = 0$:

$$\int_\Omega 2\left(\Delta u\Delta\varphi - \sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}\varphi_{x_ix_j}\right)u + ((\Delta u)^2 - |D^2u|^2)\varphi\,dx = 0$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\Delta u\Delta\varphi - \sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}\varphi_{x_ix_j}\right)u\,dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_{x_ix_i}u\varphi_{x_jx_j} - u_{x_ix_j}u\varphi_{x_ix_j}\,dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left[\tfrac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j}(u_{x_ix_i}u) - \tfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(u_{x_ix_j}u)\right]\varphi\,dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left[\tfrac{\partial}{\partial x_j}(u_{x_ix_ix_j}u + u_{x_ix_i}u_{x_j}) - \tfrac{\partial}{\partial x_j}(u_{x_ix_ix_j}u - u_{x_ix_j}u_{x_i})\right]\varphi\,dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left[u_{x_ix_ix_j}u_{x_j} + u_{x_ix_i}u_{x_jx_j} - u_{x_ix_jx_j}u_{x_i} - u_{x_ix_j}u_{x_ix_j}\right]\varphi\,dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left[u_{x_ix_i}u_{x_jx_j} - u_{x_ix_j}^2\right]\varphi\,dx \\ &= \int_\Omega \left[(\Delta u)^2 - |D^2u|^2\right]\varphi\,dx \end{aligned}$$

Euler-Lagrange-Gleichung: $(\Delta u)^2 - |D^2u|^2 = 0$.