Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
8. Übungsblatt

Aufgabe 25

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres, beschränktes Gebiet, $\lambda > 0$ und $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$I(u) = \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \lambda \cos(u) \right] dx \qquad (u \in H_0^1(\Omega))$$

Zeigen Sie:

a) I ist schwach unterhalbstetig und besitzt einen Minimierer $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

b) Es existiert ein $\lambda_* > 0$ mit $u_0 = 0$ für alle $0 < \lambda < \lambda_*$.

c) Es existiert ein $\lambda^* > 0$ mit $u_0 \neq 0$ für alle $\lambda > \lambda^*$.

d) Der Minimierer u_0 ist schwache Lösung der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung.

Hinweis: In a) und c) ist die Poincaré Ungleichung hilfreich.

Aufgabe 26

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Funktional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$I(u) = \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}(|\nabla u|^2 + |u|^2) + \alpha\sqrt{|u|^2 + 1} - u \right] dx \quad (u \in H_0^1(\Omega))$$

einen Minimierer $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ besitzt. Bestimmen Sie die Euler-Langrange-Gleichung und zeigen Sie, dass u_0 schwache Lösung der Euler-Langrange-Gleichung ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 27

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Ferner sei $p \in [1, 2^*)$, wobei $2^* = \frac{2n}{n-2}$, falls $n \geq 3$ und $2^* = \infty$, falls $n = 1, 2$. Betrachten Sie das Funktional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$I(u) = \int_\Omega |u|^p \, dx$$

eingeschränkt auf die Menge

$$V = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\inf\limits_V I = 0$, aber es existiert kein Minimierer.

b) $\sup\limits_V I < \infty$ und es existiert ein Maximierer.

Besprechung in der Übung am 18.12.2013