Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 25

a) Die zugehörige Lagrangefunktion ist gegeben durch $L(p,q,x) = \frac{|p|^2}{2} + \lambda\cos(q)$ $(p \in \mathbb{R}^n,\ q \in \mathbb{R})$. Klar: Für alle $q \in \mathbb{R}, x \in \Omega$ ist $p \mapsto L(p,q,x)$ konvex und $L, \frac{\partial L}{\partial p}$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$ stetig.

Weiter gilt $L(p,q,x) \geq \frac{1}{2}|p|^2 - \lambda$ (Koerzivität). Nach Satz VII.2 folgt die Existenz eines Minimierers $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Die schwache Unterhalbstetigkeit folgt wegen $L \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega})$ und Satz VII.1. Alternativ kann man die schwache Unterhalbstetigkeit aber auch direkt zeigen:

(i) $u \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \|u\|_{H_0^1}^2$ ist schwach unterhalbstetig auf $H_0^1(\Omega)$ (denn $u_k \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ impliziert $\|u\|_{H_0^1} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{H_0^1}$)

(ii) $u \mapsto \int_\Omega \cos(u)\,dx$ ist schwach stetig auf $H_0^1(\Omega)$: Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$. Wähle eine beliebige Teilfolge aus, nenne diese wieder $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen der kompakten Einbettung $H_0^1(\Omega) \rightharpoonup L^2(\Omega)$ konvergiert (u_k) in der L^2-Norm gegen u. Eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann punktweise fast überall gegen u und mit dem Satz von der dominierten Konvergenz und der Stetigkeit von cos folgt:
$$\int_\Omega \cos(u_{k_j})\,dx \to \int_\Omega \cos(u)\,dx, \qquad (j\to\infty)$$
Mit dem üblichen Teilfolgenargument folgt:
$$\int_\Omega \cos(u_k)\,dx \to \int_\Omega \cos(u), \qquad (k\to\infty)$$

(iii) Da die Summe eines schwach stetigen und eines schwach unterhalbstetigen Funktionals wieder schwach unterhalbstetig ist, folgt die Behauptung.

b) Es gilt $I(0) = \lambda|\Omega|$. Zeige: Es ex. λ_*, so dass für alle $0 < \lambda < \lambda_*$ gilt: $I(u) \geq \lambda|\Omega| = I(0)$ für alle $u \in H_0^1(\Omega)$.
$$\begin{aligned} I(u) &= \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + \lambda\cos(u)\right]\,dx \\ &= \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + \lambda\cos(u) - \lambda\right]\,dx + \lambda|\Omega| \\ &= I(0) + \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + \lambda(\cos(u)-1)\right]\,dx \end{aligned}$$

Wegen $\cos(x) \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\|u\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2}$ für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ folgt

$$I(u) \geq I(0) + \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \lambda \tfrac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 \geq I(0) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{C_P^2} - \lambda\right)\|u\|_{L^2}^2 \geq I(0)$$

falls $0 < \lambda < \lambda_* := \frac{1}{C_P^2}$.

c) Zeige: Für $\lambda > \lambda^*$ existiert $u^* \in H_0^1(\Omega)$ mit $I(u) < \lambda|\Omega| = I(0)$.

Sei $x_0 \in \Omega$ und $r > 0$, so dass $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$. Wähle $u^* \in C_0^\infty(\Omega)$ fest mit $u^* \equiv \pi$ in $B_r(x_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} I(u^*) &= \tfrac{1}{2}\|\nabla u^*\|_{L^2}^2 + \lambda \int_\Omega \cos(u^*)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\|\nabla u^*\|_{L^2}^2 + \lambda \int_{\Omega \cap B_r(x_0)} -1\,dx + \underbrace{\lambda \int_{\Omega \setminus B_r(x_0)} \underbrace{\cos(u^*)}_{\leq 1}\,dx}_{\leq |\Omega|} \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|\nabla u^*\|_{L^2}^2 - \lambda|B_r(x_0)| + \lambda|\Omega| < I(0) \end{aligned}$$

falls $\lambda > \frac{\|\nabla u^*\|_{L^2}}{2|B_r(x_0)|} = \lambda^*$.

d) Wegen $\left|\frac{\partial L}{\partial p}(p,q,x)\right| = |p|$ und $\left|\frac{\partial L}{\partial q}(p,q,x)\right| \leq \lambda|\sin(q)| \leq \lambda$ sind die Wachstumsvoraussetzungen aus Satz VIII.1 erfüllt und jeder Minimierer ist Lösung der Euler-Langrange-Gleichung:

$$\int_\Omega \underbrace{[\nabla u \cdot \nabla\varphi - \lambda \sin(u)\varphi]}_{\frac{\partial L}{\partial p}(\nabla u,u,x)\cdot\nabla\varphi + \frac{\partial L}{\partial q}(\nabla u,u,x)\varphi}\,dx = 0, \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

d.h. schwache Lösung des Problems

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda \sin(u), & \text{in } \Omega \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Aufgabe 26

Lagrange-Funktion: $L(p,q,x) = \frac{1}{2}(|p|^2 + q^2) + \alpha\sqrt{q^2+1} - q$.
Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned} & -\operatorname{div}\left(\tfrac{\partial L}{\partial p}(\nabla u, u, x)\right) + \tfrac{\partial L}{\partial q}(\nabla u, u, x) = 0 \quad \text{in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ \iff & -\operatorname{div}(\nabla u) + u + \alpha\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} - 1 = 0 \quad \text{in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ \iff & -\Delta u + u + \alpha\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} = 1 \quad \text{in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Existenz eines Minimierers:

(i) I koerziv:

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - |\alpha|\int_\Omega \underbrace{\sqrt{|u|^2+1}}_{\leq\sqrt{2}+\sqrt{2|u|^2}}\,dx - \int_\Omega |u|\,dx \\
&\geq \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - |\alpha|\sqrt{2}|\Omega| - (\sqrt{2}|\alpha|+1)\underbrace{\int_\Omega |u|\,dx}_{\leq\sqrt{|\Omega|}\|u\|_2} \\
&\overset{\varepsilon>0}{\geq} \tfrac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - |\alpha|\sqrt{2}|\Omega| - (\sqrt{2}|\alpha|+1)\varepsilon\underbrace{\|u\|_2^2}_{\leq C_P^2\|\nabla u\|_2^2} - (\sqrt{2}|\alpha+1)\tfrac{1}{4\varepsilon}|\Omega| \\
&\geq \left(\tfrac{1}{2} - (\sqrt{2}|\alpha|+1)C_P^2\varepsilon\right)\|\nabla u\|_2^2 - \tfrac{\tilde{C}}{4\varepsilon}|\Omega| - |\alpha|\sqrt{2}|\Omega|
\end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\frac{1}{2} - (\sqrt{2}|\alpha|+1)C_P^2\varepsilon > 0$ gilt.

(ii) I schwach unterhalbstetig:

Definiere

$$\begin{aligned}
I_1(u) &= \int_\Omega \underbrace{\tfrac{1}{2}(|\nabla u|^2+|u|^2)+\alpha\sqrt{|u|^2+1}}_{=:L_1(\nabla u,u,x)}\,dx \\
I_2(u) &= -\int_\Omega u\,dx
\end{aligned}$$

Es gilt: L_1, $\frac{\partial L_1}{\partial p}$ ist stetig und L_1 ist nach unten beschränkt. Weiter ist $p \mapsto L_1(p,q,x)$ konvex für alle $q \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$. Nach Satz VII.1 ist I_1 schwach unterhalbstetig. Betrachte I_2: Sei $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ schwach konvergent gegen $u \in H_0^1(\Omega)$. Dann folgt $u_k \to u$ in $L^2(\Omega)$ (kompakte Einbettung) und somit auch $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ (beachte: $\int_\Omega |u_k - u|\,dx \leq \sqrt{|\Omega|}\|u_k - u\|_2$). Insbesondere gilt $I_2(u_k) \to I_2(u)$ und I_2 ist schwach unterhalbstetig. Insgesamt ist $I = I_1 + I_2$ schwach unterhalbstetig.

Aus den Überlegungen am Anfang von Kapitel VII folgt die Existienz eines Minimierers u_0. Um zu zeigen, dass der Minimierer die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt, prüfe die Voraussetzungen von Satz VIII.1. Die Stetigkeitsbedingungen sind klar. Wachstumsbedingungen:

$$\begin{aligned}
\left|\tfrac{\partial L}{\partial p}(p,q,x)\right| &= |p| \\
\left|\tfrac{\partial L}{\partial q}(p,q,x)\right| &= \left|q + \frac{\alpha q}{\sqrt{q^2+1}} - 1\right| \leq |q| + |\alpha|\underbrace{\left|\frac{q}{\sqrt{q^2+1}}\right|}_{\leq 1} + 1 \leq (|\alpha|+1)(|q|+1)
\end{aligned}$$

ebenfalls erfüllt.

Aufgabe 27

Wir setzen zusätzlich voraus: $0 \in \Omega$.
Bemerkung: Der Sobolev'sche Einbettungssatz liefert $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ für $p \in [1, 2^*)$, d.h. $0 \leq I(u) < \infty$ für alle $u \in H_0^1(\Omega)$. Hierbei ist $2^* = \infty$, falls $n = 2$ und $2^* = \frac{2n}{n-2}$ für $n \geq 3$.

a) Es sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fest ($\Rightarrow u \in H_0^1(\Omega)$) mit $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 1$, d.h. $u \in V$. Definiere $u^t := t^{\frac{n-2}{2}} u(t\,\cdot)$ für $t > 1$ (im Fall $n = 2$ also $u^t = u(t\,\cdot)$). Es gilt $\operatorname{supp} u^t \subset \operatorname{supp} u$ und somit $u^t \in C_0^\infty(\Omega)$ und

$$\int_\Omega |\nabla u^t(x)|^2 \, dx = t^{n-2} \int_\Omega t^2 |(\nabla u)(tx)|^2 \, dx = t^{n-2} \tfrac{1}{t^{n-2}} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = 1,$$

d.h. $u^t \in V$ für alle $t > 1$. Weiter gilt ($n \neq 2$):

$$\begin{aligned} I(u^t) = \int_\Omega |u^t(x)|^p \, dx = t^{\frac{n-2}{2}p} \int_\Omega |u(tx)|^p \, dx &= t^{\frac{n-2}{2}p} \int_\Omega \frac{1}{t^n} |u(x)|^p \, dx \\ &= t^{\frac{n-2}{2}\overbrace{\left(p - \frac{2n}{n-2}\right)}^{<0}} \int_\Omega |u|^p \, dx \to 0 \quad (t \to \infty) \end{aligned}$$

(Für $n = 2$ erhalten wir analog dasselbe Ergebnis).

Also gilt $\inf_V I(u) = 0$. Für einen Minimierer u_0 müsste gelten $\int_\Omega |u_0|^p \, dx = 0$, d.h. $u_0 = 0$, aber $0 \notin V$.

b) Aus der Sobolev-Einbettung folgt $\|u\|_{L^p} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2} = C_p$ für alle $u \in V$ und $p \in [1, 2^*)$. Also existiert $\sup_V I < \infty$.

Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ eine maximierende Folge, d.h. $\lim_{k\to\infty} I(u_k) = \sup_V I$. Dann ist (u_k) beschränkt und besitzt eine schwach konvergente Teilfolge (mit schwachem GW u). Aufgrund der kompakten Einbettung nach $L^p(\Omega)$ gilt $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ und die schwache Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_{H_0^1}$ liefert:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx = 1.$$

Weiter gilt

$$\int_\Omega |u|^p \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k|^p \, dx = \sup_V I.$$

Setze $s := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{-\frac{1}{2}}$. Dann folgt $su \in V$, $s \geq 1$ und es gilt:

$$\sup_{v\in V} I(v) \geq I(su) = |s|^p \int_\Omega |u|^p \, dx \geq \int_\Omega |u|^p \, dx = \sup_{v\in V} I(v),$$

d.h. $s = 1$. Also $u \in V$ und u ist Maximierer.