Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

WS 2013/2014

Nichtlineare Randwertprobleme
9. Übungsblatt

Aufgabe 28

Vervollständigen Sie den Beweis von Theorem IX.2 der Vorlesung: Zeigen Sie, dass aus $u \in C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ und $f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ folgt:

$$f(u) \in C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Aufgabe 29

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\alpha \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Funktional

$$I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R},\ u \mapsto \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + u^2 - \alpha \cos(u)\sqrt{1+|u|^2} \right] dx$$

Zeigen Sie, dass I einen Minimierer auf der Menge $M := \{v \in H_0^1(\Omega) :\ \int_\Omega |v|^2 + |v|\, dx = 1\}$ besitzt.

Aufgabe 30 (Variationsrechnung für Systeme)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $L : \mathbb{R}^{n,m} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}$.

a) Betrachten Sie das Funktional

$$I(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\, dx \quad (u \in (H_0^1(\Omega))^m)$$

und bestimmen Sie das zugehörige System von Euler-Lagrange Gleichungen

b) Geben Sie das System der Euler-Lagrange-Gleichungen für das Funktional

$$I(u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 + \left[\sum_{i,j=1}^n \left((n-2)\delta_{ij} + n\frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]^2 dx, \quad u \in (H^1(\Omega))^n$$

an.

Besprechung in der Übung am 9.1.2014

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und alles Gute für das Jahr 2014!