Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Nichtlineare Randwertprobleme
Lösungen zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 28

Beachte: $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ist stets ein beschränktes Gebiet.
Vorbemerkungen:

(i) Ist $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$, so folgt $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Insbesondere gilt für $u \in C^1(\Omega)$: $u \in C^{0,\gamma}_{\text{loc}}(\Omega)$ für alle $\gamma \in (0,1]$.

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{l=1}^{n-1} a^{n-1-l}b^l.$$

(iii) Formel von Faá di Bruno (ca. 1855): Sind $f \in C^k(\mathbb{R})$ und $u \in C^k(\Omega)$, so gilt $f(u) \in C^k(\Omega)$ und

$$\frac{\partial^n}{\partial x_j^n}(f(u)) = \sum_{k \in T_n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} f^{(|k|)}(u) \prod_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{k_m!}\frac{\partial^m u}{\partial x_j^m}\right)^{k_m}, \quad (j = 1, \dots, p)$$

Hierbei ist $T_n = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n : \sum_{m=1}^n m k_m = n\}$. Insbesondere gilt stets $k_n = 1$ oder $k_n = 0$ sowie $|k| \leq n$. Im folgenden kürzen wir ab: $\alpha_k := \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$, $\beta_m := \left(\frac{1}{k_m!}\right)^{k_m}$.

Beh.: $u \in C^{n,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega),\ f \in C^{n+1}(\mathbb{R}) \Rightarrow\ f(u) \in C^{n,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$
Sei $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ beliebig. Klar: $f(u) \in C^n(\tilde{\Omega})$ nach Kettenregel. Zeige noch die Hölderstetigkeit der n-ten partiellen Ableitungen. Seien $x, y \in \tilde{\Omega}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
&\left|(f(u))^{(n)}(x) - (f(u))^{(n)}(y)\right| \\
&\quad\leq \sum_{k \in T_n} \alpha_k \left[\left| f^{(|k|)}(u(x)) \prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(x)\right)^{k_m} - f^{(|k|)}(u(y)) \prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(y)\right)^{k_m}\right|\right] \\
&\quad\leq \sum_{k \in T_n} \alpha_k \left[\left|f^{(|k|)}(u(x)) - f^{(|k|)}(u(y))\right| \left|\prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(x)\right)^{k_m}\right|\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left|f^{(|k|)}(u(y))\right| \left|\prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(x)\right)^{k_m} - \prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(y)\right)^{k_m}\right|\right]
\end{aligned}$$

Wegen $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ und $u \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ (beachte (i)) gilt:

$$\left|f^{(|k|)}(u(x)) - f^{(|k|)}(u(y))\right| = \sup_{|z|\leq \|u\|_{\infty,\tilde{\Omega}}} |f^{(|k|+1)}(z)||u(x)-u(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

Weiter ist $u \in C^k_{\text{loc}}(\Omega)$, d.h. auf $\tilde{\Omega}$ sind alle partiellen Ableitungen von u bis zur Ordnung k beschränkt. Es gilt somit:

$$\left|\prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(x)\right)^{k_m}\right| \leq C \quad \text{für alle } x \in \tilde{\Omega}$$

sowie (nochmals mit $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$):

$$\left|f^{(|k|)}(u(y))\right| \leq C$$

Betrachte nun den verbliebenen Term:

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(x)\right)^{k_m} - \prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(y)\right)^{k_m}\right| \\
&\qquad = \left|\prod_{m=2}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(x)\right)^{k_m} \beta_1 \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)^{k_1} - \prod_{m=2}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(y)\right)^{k_m} \beta_1 \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(y)\right)^{k_1}\right| \\
&\qquad \leq \beta_1 \left|\prod_{m=2}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(x)\right)^{k_m}\right| \left|\left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)^{k_1} - \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(y)\right)^{k_1}\right| \\
&\qquad\qquad + \beta_1 \left|\left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(y)\right)^{k_1}\right| \left|\prod_{m=2}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(x)\right)^{k_m} - \prod_{m=2}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(y)\right)^{k_m}\right|
\end{aligned}$$

Die jeweils ersten Faktoren in den beiden Summanden sind wieder beschränkt. Für den zweiten Faktor im ersten Summanden benutze (ii) sowie die Hölderstetigkeit der partiellen Ableitungen von u.

$$\left|\left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)^{k_1} - \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(y)\right)^{k_1}\right| = \underbrace{\left|\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(x) - \tfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right|}_{\leq C|x-y|^\alpha} \left|\sum_{l=0}^{k_1-1} \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)^{k_1-l-1} \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)^{l}\right|$$

Den zweiten Faktor im zweiten Summanden können wir induktiv behandeln. Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(x)\right)^{k_m} - \prod_{m=1}^n \beta_m \left(\tfrac{\partial^m u}{\partial x_j^m}(y)\right)^{k_m}\right| \\
&\qquad \leq C|x-y|^\alpha + C\left|\beta_n \left(\tfrac{\partial^n u}{\partial x_j^n}(x)\right)^{k_n} - \beta_n \left(\tfrac{\partial^n u}{\partial x_j^n}(y)\right)^{k_n}\right| \\
&\qquad \overset{k_n \leq 1}{=} \leq C|x-y|^\alpha + C\beta_n \left|\tfrac{\partial^n u}{\partial x_j^n}(x) - \tfrac{\partial^n u}{\partial x_j^n}(y)\right| \\
&\qquad \leq C|x-y|^\alpha
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $u \in C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ verwendet haben. Insgesamt folgt die Hölderstetigkeit.

Aufgabe 29

Die Menge M ist nicht leer, da für ein beliebiges $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\backslash\{0\}$ ein $t > 0$ existiert, so dass $\int_\Omega t^2|\varphi|^2 + t|\varphi|\,dx = 1$ (die quadratische Gleichung $at^2 + bt - 1 = 0$ besitzt für $a, b > 0$ immer eine positive Lösung).
Für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 - |\alpha|(1 + |u|^2)\right)\,dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega \left(|u|^2 - |\alpha||u| - |\alpha|\right)\,dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega \left(|u|^2 - \tfrac{1}{2}|u|^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 - |\alpha|\right) \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - |\Omega|\left(|\alpha| + \tfrac{1}{2}\alpha^2\right),
\end{aligned}$$

Also ist I koerziv.
Sei nun $(u_k) \subset M$ eine minimierende Folge in $M \neq \emptyset$, d.h. $I(u_k) \to \inf_{u\in M} I(u)$, $k \to \infty$. Aus der Koerzivität von I folgt die Beschränktheit der Folge (u_k) in $H_0^1(\Omega)$. Somit existiert eine Teilfolge (u_{k_j}) und $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$. Aufgrund der kompakten Einbettung gilt $u_{k_j} \to u$ in $L^2(\Omega)$ (sowie $u_{k_j} \to u$ in $L^1(\Omega)$ mit Hölder und der Beschränktheit von Ω) und nochmalige Auswahl einer Teilfolge (die wir wieder mit u_{k_j} bezeichnen) liefert $u_{k_j} \to u$ punktweise fast überall in Ω. Somit folgt: $\int_\Omega |u_{k_j}|^2\,dx \to \int_\Omega |u|^2\,dx$, $\int_\Omega |u_{k_j}|\,dx \to \int_\Omega |u|\,dx$ sowie

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \cos(u_{k_j})\sqrt{1 + |u_{k_j}|^2}\,dx - \int_\Omega \cos(u)\sqrt{1 + |u|^2}\,dx\right| \\
&\qquad\leq \int_\Omega |\cos(u_{k_j}) - \cos(u)|\sqrt{1 + |u|^2}\,dx + \int_\Omega |\cos(u_k)|\left|\sqrt{1 + |u_{k_j}|^2} - \sqrt{1 + |u|^2}\right|\,dx \\
&\qquad\leq \int_\Omega |\cos(u_{k_j}) - \cos(u)|\sqrt{1 + |u|^2}\,dx + \int_\Omega ||u_{k_j}| - |u||\,dx \\
&\qquad\leq |\cos(u_{k_j}) - \cos(u)|\sqrt{1 + |u|^2}\,dx + \int_\Omega |u_k - u|\,dx \to 0 \quad (j \to \infty)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der Abschätzung die umgekehrte Dreiecksungleichung für Vektoren und reelle Zahlen verwendet. Die Konvergenz gegen 0 folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz sowie $u_{k_j} \to u$ in $L^1(\Omega)$.
Aus der schwachen Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_{H_0^1}$ folgt nun

$$I(u) \leq \liminf_{j\to\infty} I(u_{k_j}) = \inf_{v\in M} I(v),$$

und weiter

$$1 = \int_\Omega |u_{k_j}|^2 + |u_{k_j}|\,dx \to \int_\Omega |u|^2 + |u|\,dx \quad (j \to \infty),$$

d.h. $u \in M$ und u ist Minimierer von I auf M.

Aufgabe 30

a) Wir schreiben

$$L(p,q,x) = L(p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}, p_{21}, \dots, p_{2n}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{mn}, q_1, \dots, q_m, x)$$

Minimiere I: Sei dazu $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ fest und $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Für einen Minimierer $u \in (H^1(\Omega))^m$ von I muss dann gelten:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(I(u+\lambda\varphi)\right)\bigg|_{\lambda=0} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Bemerkung:

$$\lambda\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1\varphi \\ \vdots \\ \lambda_m\varphi \end{pmatrix}, \quad \nabla u = \begin{pmatrix} (u_1)_{x_1} & \dots & (u_m)_{x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ (u_1)_{x_n} & \dots & (u_m)_{x_n} \end{pmatrix}, \quad \nabla(\lambda\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1\varphi_{x_1} & \dots & \lambda_m\varphi_{x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1\varphi_{x_n} & \dots & \lambda_m\varphi_{x_n} \end{pmatrix} = \nabla\varphi\lambda^T$$

Der Eintrag p_{ij} in $L(\nabla u, u, x)$ enthält $(u_j)_{x_i}$ (Matrix wird zeilenweise in L geschrieben). Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \int_\Omega L(\nabla u + \nabla(\lambda\varphi), u + \lambda\varphi, x)\, dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(L(\nabla u + \nabla\varphi\lambda^T, u + \lambda\varphi, x)\right)\, dx \\ &\int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial p_{ji}}(\nabla u + \nabla\varphi\lambda^T, u+\lambda\varphi, x)\varphi_{x_j} + \frac{\partial L}{\partial q_i}(\nabla u + \nabla\varphi\lambda^T, u + \lambda\varphi, x)\varphi\, dx \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ und Nullsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial p_{ji}}(\nabla u, u, x)\varphi_{x_j} + \frac{\partial L}{\partial q_i}(\nabla u, u, x)\varphi\, dx = 0 \\ \iff &\int_\Omega \left[-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial p_{ji}}(\nabla u, u, x)\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i}(\nabla u, u, x)\right] \varphi\, dx = 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit das folgende System von Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial p_{ji}}(\nabla u, u, x)\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i}(\nabla u, u, x) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

b) Haben

$$I(u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 + \left[\sum_{i,j=1}^n \left((n-2)\delta_{ij} + n\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]^2 dx, \quad u \in (H^1(\Omega))^n$$

Es gilt also

$$L = L(p,x) = \sum_{i,j=1}^n |p_{ji}|^2 + \left(\sum_{i,j=1}^n \left((n-2)\delta_{ij} + n\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) p_{ji}\right)^2.$$

Wegen

$$\frac{\partial L}{\partial p_{ji}}(p,x) = 2p_{ji} + 2\sum_{k,l=1}^{n} \left((n-2)\delta_{kl} + \frac{nx_k x_l}{|x|^2} \right) p_{lk} \left((n-2)\delta_{ij} + \frac{nx_i x_j}{|x|^2} \right)$$

erhalten wir das System der Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial p_{ji}}(\nabla u, x) \right) = 0, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + 2\sum_{k,l=1}^{n} \left((n-2)\delta_{kl} + \frac{nx_k x_l}{|x|^2} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \left((n-2)\delta_{ij} + \frac{nx_i x_j}{|x|^2} \right) \right), \quad (i = 1, \ldots, n)$$