

# Numerische Methoden, Sommersemester 2014

## Übungsblatt 4

### Aufgabe 1

a) Berechnen Sie für  $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  die Kondition der Matrix bezüglich der Spaltensummen- und der Zeilensummennorm (d.h. zu berechnen sind  $\text{cond}_1(A)$  und  $\text{cond}_\infty(A)$ ).

b) Es sei  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definiert durch

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $\text{cond}_1(B)$  und  $\text{cond}_\infty(B)$ .

c) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem  $Cx = b$  mit

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es sei  $b + \Delta b$  eine Störung der rechten Seite. Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler (gemessen in der Maximumnorm) der Lösung an, falls für den absoluten Fehler der Störung  $\|\Delta b\|_\infty < 10^{-3}$  gilt.

*Hinweis:* Für  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  und  $v \in \mathbb{C}^m$  lassen sich die Matrixnormen sowie die Vektornormen wie folgt berechnen:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{„Spaltensummennorm“})$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{„Zeilensummennorm“})$$

$$\|v\|_1 := \sum_{i=1}^m |v_i|, \quad \|v\|_\infty := \max_{i=1, \dots, m} |v_i|.$$

## Aufgabe 2

Es bezeichne  $\|\cdot\|$  eine Matrixnorm auf  $\mathbb{C}^{m \times m}$ , welche  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  für  $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$  erfüllt. Es sei  $E$  die Einheitsmatrix in  $\mathbb{C}^{m \times m}$  und  $S \in \mathbb{C}^{m \times m}$  mit  $\|S\| < 1$  gegeben. Zeigen Sie:

a) Die Matrix  $E + S$  ist invertierbar.

b) Es gilt

$$\|(E + S)^{-1}\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|S\|}.$$

*Hinweis:* Überzeugen Sie sich, dass die Inverse von  $E + S$  durch die unendliche Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S^k$  gegeben ist.

## Aufgabe 3 (Zusatzaufgabe)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b, \tag{1}$$

wobei  $b \in \mathbb{C}^m$  sei und  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$  eine invertierbare Matrix sei. Ferner sei

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \tag{2}$$

eine Störung dieses Systems mit  $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  und  $\tilde{b} \in \mathbb{C}^m$ . Mit  $\Delta A$  und  $\Delta b$  werde jeweils der Fehler der Störung bezeichnet, d.h.  $\tilde{A} = A + \Delta A$  und  $\tilde{b} = b + \Delta b$ .

Außerdem werde mit  $\|\cdot\|$  eine beliebige Vektornorm und die entsprechende zugeordnete Matrixnorm bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Falls  $\|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$  ist, so ist  $\tilde{A}$  invertierbar und es gilt

$$\|\tilde{A}^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}.$$

b) Falls  $\|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$  ist, so gilt für den Fehler  $\Delta x = \tilde{x} - x$  der eindeutigen Lösungen  $x$  bzw.  $\tilde{x}$  der Gleichungen aus (1) bzw. (2) die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left( \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right).$$

Die Aufgaben werden am 06.06.2014 in der Übung besprochen.