Numerische Methoden, Sommersemester 2014

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Bestimmen Sie einen Näherungswert zu den Integralen

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^{1} (3x^2 - 2e^x - 5)\,dx$$

unter Verwendung der Trapezregel, der zusammengesetzten Trapezregel zur Intervalllänge $h = \frac{1}{2}$ und der Simpsonregel. Bestimmen Sie darüber hinaus den exakten Wert der Integrale sowie den jeweiligen absoluten Fehler.

Aufgabe 2

Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Für $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathbb{P}_m$ die Menge aller Polynome vom Grad $\leq m$ und p_m das Monom vom Grad m (d.h. $p_m(x) = x^m$ für $x \in \mathbb{R}$). Mit $R(f)$ bzw. $R(g)$ werde stets der Quadraturfehler bezeichnet.

a) Zeigen Sie: Eine Quadraturformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = a_0 f(x_0) + \ldots + a_n f(x_n) + R(f)$$

für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ ist genau dann für alle Polynome aus $\mathbb{P}_m$ exakt, wenn sie für die Monome $p_0, p_1, \ldots, p_m$ exakt ist.

b) Bestimmen Sie $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ so, dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = a_0 g(-1) + a_1 g(0.75) + a_2 g(1) + R(g)$$

für alle $P \in \mathbb{P}_2$ exakt ist.

Die Aufgaben werden am 27.06.2014 in der Übung zusammen mit dem 5. Übungsblatt besprochen.