Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Robin Flohr

Numerische Methoden, Sommersemester 2014

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Es sei y die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = x^2 + y^2 - 1, \qquad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie Näherungswerte an $y(1)$ unter Verwendung

a) des Halbschrittverfahrens zu der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$;

b) des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens zu den Schrittweiten $h_1 = 1, h_2 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Einschrittverfahren der Form

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h), \qquad y(x_0) = y_0$$

mit $x_n = x_0 + nh$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ zur Berechnung einer Näherungslösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Zeigen Sie:

a) Das Einschrittverfahren ist genau dann von der Konsistenzordnung 2, wenn gilt:

$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial h}(x, y, 0) = \frac{\partial_1 f(x, y) + \partial_2 f(x, y) f(x, y)}{2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie dazu die Taylorentwicklung der Verfahrensfunktion $\Phi(x, y, h)$ bzgl. der Variablen h bis zur Ordnung 1 und die Taylorentwicklung von $z(x + h)$ bis zur Ordnung 2. Dabei sei z die Lösung des Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \qquad z(x) = y.$$

Berechnen Sie dann den (in der Vorlesung definierten) lokalen Diskretisierungsfehler

$$\theta(x, y, h) = \Delta(x, y, h) - \Phi(x, y, h).$$

b) Das Verfahren von Heun ist von der Konsistenzordnung 2.

Die Aufgaben werden am 11.07.2014 in der Übung zusammen mit dem 7. Übungsblatt besprochen.