MODULPRÜFUNG Numerische Methoden

Sommersemester 2014 - 04.09.2014

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie, Geoinformatik)

Name: **Matr.-Nr.:** **Pkt:**

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Zum Bestehen der Klausur sind **8** von **24** Punkten zu erlangen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ay = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, eine untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass gilt

$$PA = LR.$$

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ay = b$. Rechnen Sie nur so weit, dass Sie den Wert für y_3 angeben können.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der angegebenen inversen Matrix. Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 2$.

a) Führen Sie mit der Matrix A und dem Startvektor $x^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ die ersten zwei Schritte der von-Mises Iteration durch. Geben Sie die im zweiten Schritt berechnete Näherung und den absoluten Fehler an den betragsgrößten Eigenwert von A an.

b) Finden Sie nun eine Näherung an den betragsmäßig kleinsten Eigenwert von A. Benutzen Sie dafür die inverse Iteration von Wielandt und führen Sie zwei Schritte mit dem Startvektor $y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ durch. Geben Sie wiederum den absoluten Fehler zwischen der Näherung und dem approximierten Eigenwert an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = -5x_1 - 2x_2 - 10$. Geben Sie den maximalen Wert von $Z(x_1, x_2)$ an unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 160, \\ 6x_1 - 2x_2 \geq -60, \\ x_1 + 5x_2 \geq 40, \\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 20. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei das Integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2+1} dx,$$

dessen exakter Wert arctan(2) – arctan(-1) $\approx$ 1,89 beträgt.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Simpson-Regel eine Näherung für das gegebene Integral und geben Sie den absoluten Fehler an.

b) Gegeben sei die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = af(-1) + f(0) + bf(2) + R(f)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichne $R(f)$ den Fehler der Quadraturformel. Bestimmen Sie die Konstanten a und b so, dass die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 1 exakt ist und berechnen Sie damit eine Näherung sowie den absoluten Fehler für das gegebene Integral.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 24\frac{x}{1+y(x)}, \quad y(0) = 0.$$

Berechnen Sie Näherungswerte für $y(1)$ unter Verwendung

a) des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$;

b) des 2-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens mit $\beta = \frac{1}{2}$ (Verfahren von Heun) zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$-y''(x) - 8y'(x) = 4 - 2x, \quad y(0) = 0, y(4) = \tfrac{3}{5}.$$

a) Zeigen Sie, dass für eine $\mathcal{C}^3$-Funktion y die Gleichung

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

für $h \to 0$ gilt. Dies wird auch als zentraler Differenzenquotient bezeichnet.

b) Leiten Sie nun das lineare Gleichungssystem her, welches man erhält, wenn man das Randwertproblem mit Schrittweite $h = 1$ diskretisiert. Benutzen Sie für die Diskretisierung der zweiten Ableitung zweite Differenzen und für die erste Ableitung den zentralen Differenzenquotienten aus dem ersten Aufgabenteil.