MODULPRÜFUNG Numerische Methoden

Wintersemester 2014/15 - 18.03.2015

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie, Geoinformatik)

Name: **Matr.-Nr.:** **Pkt.:**

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Zum Bestehen der Klausur sind **8** von **24** Punkten zu erlangen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ay = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{37}{4} & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -24 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von A.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ay = b$. Rechnen Sie nur so weit, dass Sie den Wert für y_3 angeben können.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Formulieren Sie in Pseudo-Code einen Algorithmus, welcher zu einer gegebenen diagonalisierbaren, regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ und einem Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^m$ eine Approximation an den betragsmäßig größten Eigenwert von A berechnet. Die Iteration soll abbrechen, sobald 100 Iterationsschritte durchgeführt wurden.
Hinweis: Sie dürfen eine Funktion [k]=max(abs(x)) verwenden, welche zu einem vorgegebenen Vektor x den Index k des betragsgrößten Elements des Vektors ausgibt.

b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mit der angegebenen inversen Matrix und dem angegebenen Startvektor. Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{6}$. Führen Sie mit der Matrix A und dem Startvektor x^0 die ersten drei Schritte der inversen Iteration von Wielandt durch. Geben Sie die berechnete Näherung sowie den absoluten Fehler an den approximierten Eigenwert von A an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem: Gesucht ist der maximale Wert der Zielfunktion $Z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 20$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 30, \\ -x_1 - 5x_2 \geq -60, \\ x_1 + 6x_2 - 12x_3 \leq 130, \\ x_1 \geq 10,\ x_2, x_3 \leq 0. \end{cases}$$

Führen Sie das Problem in ein Standardmodell über und führen Sie den Simplex-Algorithmus durch. Begründen und erklären Sie jeden Schritt kurz.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei das Integral

$$\int_{-3}^{1} x^2 + \frac{x}{x+4} dx,$$

dessen exakter Wert $\frac{40}{3} - 4\ln 5 \approx 6{,}8956$ beträgt.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zur Schrittweite $h = 1$ eine Näherung für das gegebene Integral und geben Sie den absoluten Fehler an.

b) Gegeben sei die Quadraturformel

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx = af(-3) + 2f(0) + \tfrac{1}{2}f(b) + R(f)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichne $R(f)$ den Fehler der Quadraturformel. Bestimmen Sie die Konstanten a und b so, dass die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 1 exakt ist und berechnen Sie damit eine Näherung sowie den absoluten Fehler für das gegebene Integral.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Runge-Kutta-Verfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\Phi(x, y, h) = \tfrac{1}{2}f(x, y) + \tfrac{1}{2}f(x + \tfrac{1}{2}h, y + \tfrac{1}{2}hf(x, y))$$

mindestens Konsistenzordnung 1 besitzt.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{x}{y(x)} + 1, \quad y(0) = 2.$$

Berechnen Sie Näherungswerte für $y(2)$ unter Verwendung des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x + \frac{y^2}{4} \\ x + \frac{y}{4} \end{pmatrix}$$

mit den Nullstellen $(0, 0)$ und $(-\frac{1}{4}, 1)$.

a) Berechnen Sie $F'(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und begründen Sie, warum der Wert $(0, \frac{1}{2})$ nicht als Startwert für das Newton-Verfahren geeignet ist.

b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von F und führen Sie den ersten Iterationsschritt zum Startwert $(x_0, y_0) = (1, 0)$ durch.