Aufgabe 1:

Führen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 1 & -2\sqrt{2} & 4 \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

durch. Geben Sie Q und R an.

Aufgabe 2:

a) Sei $A = LR$ eine $LR-$Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, L und R seien bereits berechnet.
Formulieren Sie in Pseudo-Code einen Algorithmus, der im Falle der eindeutigen Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ dessen Lösung berechnet und sonst eine Fehlermeldung ausgibt.

b) Schreiben Sie in Pseudo-Code eine Prozedur $Simpson(f, a, b)$, welche die durch die Simpsonregel gegebene Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnet.
Schreiben Sie zudem eine Prozedur $ZusSimpson(f, a, b, m)$, welche die Näherung für $\int_a^b f(x)\,dx$ durch die zusammengesetze Simpsonregel zu m Teilintervallen berechnet.
Hinweis: Sie dürfen eine Funktion $eval(f, x)$ zur Bestimmung von $f(x), x \in [a, b]$ verwenden.

Aufgabe 3:

Lösen Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\text{Maximiere} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \qquad \text{unter den Nebenbedingungen}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \geq -5 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0;\ x_3, x_4 \leq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4:

Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen $\operatorname{cond}_\infty(A)$ und $\operatorname{cond}_1(A)$.

b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft:

$$\operatorname{cond}_\infty(DB) = \min\{\operatorname{cond}_\infty(\tilde{D}B) \ : \ \tilde{D} \text{ Diagonalmatrix}\}.$$

Berechnen Sie $\operatorname{cond}_\infty(DB)$.

Hinweis: Die Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist die Zeilensummennorm, $\|\cdot\|_1$ die Spaltensummennorm.

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^{-x} - x$ auf $(0,1)$ genau eine Nullstelle x^* besitzt.

b) Zeigen Sie, dass das Newtonverfahren die Iterationsvorschrift

$$x^{k+1} = \frac{1 + x^k}{1 + e^{x^k}}$$

liefert. Bestimmen Sie unter Verwendung des Taschenrechners die Iterierten x_1, x_2 zum Startwert $x^0 = 0.5$.
Im Folgenden sei $x^0 \in [0,1]$.

c) Zeigen Sie: Falls $0 \leq x^k \leq 1$, so gilt $0 \leq x^{k+1} \leq 1$.

d) Berechnen Sie eine Konstante C mit

$$|x^k - x^*| \leq C \cdot |x^{k-1} - x^*|^2 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 6:

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Trapezregel-Regel eine Näherung für

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx\,.$$

Geben Sie eine obere Schranke für den absoluten Fehler an. Benutzen Sie hierzu die in der Vorlesung angegebene Fehlerdarstellung.

b) Bestimmen Sie eine Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)\, dx = a_0 f(0) + a_1 f(\frac{1}{2}) + a_2 f(\frac{2}{3}) + R(f)\,,$$

die für alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt ist. Berechnen Sie mit dieser Quadraturformel einen Näherungswert für das Integral aus a).

Aufgabe 7:

Sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -2xy(x)^2 + 1, \qquad\qquad y(0) = 1$$

gegeben. Sie können ohne Beweis benutzen, dass dieses Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ besitzt. Berechnen Sie Näherungswerte für $y(1)$ unter Verwendung

a) des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$

b) des Verfahrens von Heun zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Verwenden Sie in Teilaufgabe b) den Taschenrechner.