Musterlösung Aufgabe 1:

Es gilt $\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \| = 2$, also $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und

$$\begin{aligned}
Q_1 = I - \frac{2}{v^T v} v v^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
Q_1 \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit $\| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \| = 5$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{aligned}
Q_2 = I - \frac{2}{v^T v} v v^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{80} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & -32 \\ 0 & -32 & 16 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
Q_2 Q_1 \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 - \frac{4\sqrt{2}}{5} \\ 0 & 0 & 4 - \frac{3\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix} =: R
\end{aligned}$$

Somit $A = QR$ mit R wie oben und

$$\begin{aligned}
Q &= Q_1^T Q_2^T = Q_1 Q_2 \\
&= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & -3 + 4\sqrt{2} & 4 + 3\sqrt{2} \\ 5 & -3 - 4\sqrt{2} & 4 - 3\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Auch der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der entsprechende Vektor im zweiten Schritt mit "+" statt "−" anstatt der oben genannten führen auf korrekte Householdermatrizen und wurden als richtig gewertet.

Musterlösung Aufgabe 2:

a)

// (Löse $Ly = b$)
Für i=1 bis n $\quad y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} y_j$

// (Löse $Rx = y$)
Für i=n bis 1 {
  Falls $R_{ii} = 0$: Ausgabe: Fehler!
  sonst: $x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} R_{ij} x_j}{R_{ii}}$
}

b)

Simpson(f,a,b) {
  Ausgabe: $\frac{1}{6}$ eval(f,a) $+\frac{4}{6}$eval(f,$\frac{a+b}{2}$)$+\frac{1}{6}$ eval(f,b)
}

ZusSimpson(f,a,b,m) {
  h = $\frac{b-a}{m}$
  sum = 0
  Für i=0 bis m-1 {
    sum = sum + Simpson(f,a,a+h)
    a = a+h
  Ausgabe: sum
}

ODER:

```
ZusSimpson(f,a,b,m) {
    h = (b−a)/m
    sum = eval(f,a) + 4· eval(f,a+h/2)
    Für i=1 bis m-1 {
        a = a+ h
        sum = sum + 2· eval(f,a) + 4·eval(f,a+h/2)
    sum = sum + eval(f,b)
    Ausgabe: h/6· sum
}
```

Musterlösung Aufgabe 3:

Die Substitution $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = -x_3, y_4 = -x_4$ liefert das äquivalente Problem

$$\text{Maximiere} \quad y_1 + 2y_2 - 3y_3 - 4y_4 \qquad \text{unter den Nebenbedingungen}$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \leq 5 \\ 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq 8 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

und es ergeben sich die Tableaus

y_5	-2	2	1	1	1	0	5
y_6	3	-2	4	0	0	1	8
	-1	-2	3	4	0	0	0

y_2	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
y_6	1	0	5	1	1	1	13
	-3	0	4	5	1	0	5

y_2	0	1	$\frac{11}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{31}{2}$
y_1	1	0	5	1	1	1	13
	0	0	19	8	4	3	44

Die optimale Lösung ist daher gegeben durch $(y_1, \ldots, y_6) = (13, \frac{31}{2}, 0, 0, 0, 0)$; dies entspricht der optimalen Lösung

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (13, \frac{31}{2}, 0, 0)$$
$$\text{Zielfunktionswert} = 44$$

Musterlösung Aufgabe 4:

a) Es gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= \max(2+4+1, 1+1+1, 0+0+1) = 7 \\
\|A^{-1}\|_\infty &= \max(\frac{1}{2}+2+\frac{5}{2}, \frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}, 0+0+1) = 5 \\
\mathrm{cond}_\infty(A) &= \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 35 \\
\|A\|_1 &= \max(2+1+0, 4+1+0, 1+1+1) = 5 \\
\|A^{-1}\|_1 &= \max(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0, 2+1+0, \frac{5}{2}+\frac{3}{2}+1) = 5 \\
\mathrm{cond}_1(A) &= \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 25
\end{aligned}$$

b) Eine optimale Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ist nach Vorlesung gegeben durch

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{|B_{11}| + |B_{12}|} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} \\
b &= \frac{1}{|B_{21}| + |B_{22}|} = \frac{1}{12+8} = \frac{1}{20}\,.
\end{aligned}$$

Dann gilt $\|DB\|_\infty = 1$ sowie

$$\begin{aligned}
\|(DB)^{-1}\|_\infty = \|B^{-1}D^{-1}\|_\infty &= \|\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \|_\infty \\
&= \| \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \|_\infty = \max\{\frac{8}{3} + \frac{5}{3}, 4+5\} \\
&= 9
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit die optimale Kondition bzgl. $\| \cdot \|_\infty$ durch

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \qquad \text{und es gilt} \qquad \mathrm{cond}_\infty(DB) = 9$$

Musterlösung Aufgabe 5:

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x} - x\\
f'(x) &= -e^{-x} - 1\\
f''(x) &= e^{-x}
\end{aligned}
$$

Ferner gilt:

$$f(0) = 1 - 0 = 1 \qquad\qquad f(1) = e^{-1} - 1 < 0$$

Da f stetig existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von f in $(0,1)$. Aufgrund der strengen Monotonie von f auf $(0,1)$, denn $f'(x) \leq -1$, handelt es sich um die einzige Nullstelle in $(0,1)$.

b) Die Iterationsvorschrift lautet

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} = x^k + \frac{e^{-x^k} - x^k}{e^{-x^k} + 1} = \frac{1 + x^k}{1 + e^{x^k}}$$

Die ersten zwei Iterierten zum Startwert $x^0 = 0.5$ lauten

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \frac{1.5}{1 + e^{0.5}} \approx 0.566\\
x^2 &= \frac{1 + x^1}{1 + e^{x^1}} \approx 0.567
\end{aligned}
$$

c) Falls $0 \leq x^k \leq 1$, so gilt $1 + x^k > 0$ und daher wegen $1 + e^{x^k} > 0$ unmittelbar

$$x^{k+1} = \frac{1 + x^k}{1 + e^{x^k}} \geq 0$$

Andererseits gilt für $x^k \geq 0$ die Ungleichung $e^{x^k} \geq 1 \geq x^k$ und daher

$$x^{k+1} = \frac{1 + x^k}{1 + e^{x^k}} \leq \frac{1 + e^{x^k}}{1 + e^{x^k}} = 1$$

d) Es gilt für alle $x \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
&|f'(x)| = |-e^{-x} - 1| = 1 + e^{-x} \geq 1 \quad (\text{oder } \geq 1 + e^{-1})\\
&|f''(x)| = |e^{-x}| \leq 1
\end{aligned}
$$

Somit, da alle Iterierten nach c) in $[0,1]$ liegen (Startwert $x^0 = 0.5 \in [0,1]$!):

$$|x^k - x^*| \leq \frac{1}{2 \cdot 1} |x^{k-1} - x^*|^2$$

und wir erhalten als eine mögliche Wahl $C = \frac{1}{2}$.

Musterlösung Aufgabe 6:

a) Die Näherung lautet

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}(e^0 + e^1) + R(f)\\ &\approx 1.859 + R(f)\end{aligned}$$

Für $f(x) = e^{x^2}$ gilt:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2xe^{x^2}\\ f''(x) &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}\end{aligned}$$

Folglich gilt für den Fehler $R(f)$:

$$|R(f)| \leq \frac{(1-0)^3}{12} \cdot \max_{x\in[0,1]} |2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}| = \frac{1}{12}\cdot 6e = \frac{e}{2} \quad (\approx 1.359)$$

b) Für a_0, a_1, a_2 müssen die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^1 1\,dx = a_0 + a_1 + a_2\\ \frac{1}{2} &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}a_1 + \frac{2}{3}a_2\\ \frac{1}{3} &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{4}a_1 + \frac{4}{9}a_2\end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet

$$(a_0, a_1, a_2) = (\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}).$$

Die Näherung des Integrals ist dann gegeben durch

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{(2/3)^2} \quad (\approx 1.4197)$$

Musterlösung Aufgabe 7:

a) Die Verfahrensfunktion des Euler-Verfahrens lautet $\Phi(x, y, h) = f(x, y) = -2xy^2 + 1$ und die Iterationsvorschrift ist gegeben durch

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, h) = y_k - 2hx_k y_k^2 + h$$

Wir erhalten mit $y_0 = 1$ und $x_0 = 0, x_1 = h = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_2 &= \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

b) Verfahrensfunktion des Verfahrens von Heun: $\Phi(x, y, h) = \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$ mit

$$k_1 = f(x, y) \qquad k_2 = f(x + h, y + hk_1)$$

Berechnung von y_1:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0, 1) = 1 \\ k_2 &= f(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}) = -\frac{5}{4} \\ y_1 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2) = \frac{15}{16} = 0.9375 \end{aligned}$$

Berechnung von y_2:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(\frac{1}{2}, \frac{15}{16}) \approx 0.121 \\ k_2 &= f(1, \frac{511}{512}) \approx -0.992 \end{aligned}$$

Wir erhalten als Näherungswert:

$$y(1) \approx y_2 = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \big(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\big) \approx 0.71975$$