Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel

Wintersemester 2010/11
22.03.2011

MODULPRÜFUNG Numerische Methoden (Höhere Mathematik IV für die Fachrichtung Meteorologie bzw. Numerische Mathematik für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A.

b) Gegeben seien $y \in \mathbb{R}^n$ und eine symmetrische, positiv definite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Formulieren Sie in Pseudo-Code einen Algorithmus zur Bestimmung der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Bx = y, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: Sie dürfen eine Funktion `cholesky(B)` verwenden, welche die Matrix L der Cholesky-Zerlegung $B = LL^H$ einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ berechnet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 + 80$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 180 \\ -x_1 + x_2 \ge -100 \\ x_1 - 3x_2 \le 180 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 20. \end{cases}$$

Geben Sie den maximalen Wert von $Z(x_1, x_2)$ unter diesen Nebenbedingungen an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $\alpha \ge -1$ und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\mathrm{cond}_\infty(A_\alpha)$ für alle $\alpha \ge -1$.

b) Es sei nun $\alpha = 0$. Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{cond}_\infty(DA_0) = \min\{\mathrm{cond}_\infty(\tilde{D}A_0) \ :\ \tilde{D}\,\text{Diagonalmatrix}\}.$$

Geben Sie $\mathrm{cond}_\infty(A_0)$ und $\mathrm{cond}_\infty(DA_0)$ an.

Hinweis: Die Matrixnorm $\|\,.\,\|_\infty$ (Zeilensummennorm) einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich berechnen durch

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} xe^y + 1 \\ x + y \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $F'(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von F und führen Sie den ersten Iterationsschritt zum Startwert $(x_0, y_0) = (0,0)$ durch.
Hinweis: Es kann vorausgesetzt werden, dass F auf $\mathbb{R}^2$ genau eine Nullstelle besitzt.

c) Begründen Sie, warum der Wert $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (1,0)$ nicht als Startwert geeignet ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zur Schrittweite $h = 1$ eine Näherung für

$$\int_1^5 \frac{1}{\ln(1+x)}\,dx.$$

b) Gegeben sei die Quadraturformel

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = af(-1) + bf(0) + cf(1) + R(f)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$; $R(f)$ bezeichne den Fehler der Quadraturformel.
Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c so, dass die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x) - 2\frac{x}{y(x)}, \qquad y(0) = 1.$$

a) Berechnen Sie einen Näherungswert für $y(1)$ unter Verwendung des Eulerschen Polygonzugverfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$.

b) Geben Sie das klassische Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ für dieses Anfangswertproblem an. Welche Konsistenzordnung besitzt dieses Verfahren?

Hinweis: Die Existenz der Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ kann vorausgesetzt werden.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Donnerstag, den 31.03.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus.
Die **Klausureinsicht** findet am Dienstag, den 12.04.2011, um 13.15 Uhr im Raum 3A-01 (Allianz-Gebäude 05.20) statt.