MODULPRÜFUNG Numerische Methoden
(Höhere Mathematik IV für die Fachrichtung Meteorologie bzw. Numerische Mathematik für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen)

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Die gegebene Matrix A ist symmetrisch und positiv definit. Somit lsst sich die Matrix zerlegen in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix L mit ihrer transponierten Matrix L^H, d.h. es existiert eine Cholesky-Zerlegung $A = LL^H$.
Zur Berechnung von L setzen wir $A^{(1)} := A$ und

$$L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A^{(2)} := L_1 A^{(1)} L_1^H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{(3)} := L_2 A^{(2)} L_2^H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da $A^{(3)}$ eine Diagonalmatrix ist, gilt ferner $A^{(3)} = \sqrt{D}\sqrt{D}$ mit $\sqrt{D} = \operatorname{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Unter Verwendung von

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir somit

$$L := L_1^{-1} L_2^{-1} \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Cholesky-Zerlegung von A ist gegeben durch $A = LL^H$.

b) Ist $B = LL^H$ die Cholesky-Zerlegung der Matrix B, so lässt sich die Lösung des linearen Gleichungssystems $Bx = y$ in zwei Schritten berechnen. Wir lösen zunächst die Gleichung $Lw = y$ und anschließend die Gleichung $L^H x = w$. Da sowohl L als auch L^H Dreiecksgestalt haben, lassen sich diese Gleichungen durch Rücksubstitution lösen.
In Pseudo-Code kann das Verfahren folgendermaßen formuliert werden:

```
input B, y
L=cholesky(B)
n=length(y)

for (i=1..n)
    w(i)=1/l(i,i) (y(i) - sum[k=1..i-1, l(i,k) *w(k)])
for (i=n..1)
    x(i)=1/l(i,i) (w(i)-sum[k=i+1..n, conj(l(k,i))*x(k)])

output x
```

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir bestimmen den maximalen Wert von $Z(x_1, x_2)$ mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Um das gegebene Optimierungsproblem in ein Standardmodell zu überführen, substituieren wir $x_2' = 20 - x_2$. Außerdem multiplizieren wir die zweite Nebenbedingung mit (-1), damit das Standardmodell in Normalform vorliegt. Dann ist das gegebene Problem äquivalent zu

$$Z(x_1, x_2') = 2x_1 + 3x_2' + 20$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2' \leq 200 \\ x_1 + x_2' \leq 120 \\ x_1 + 3x_2' \leq 240 \\ x_1 \geq 0, \ x_2' \geq 0. \end{cases}$$

Das Ausgangstableau des Simplex-Algorithmus lautet also

	x_1	x_2'	y_1	y_2	y_3	
y_1	2	1	1	0	0	200
y_2	1	1	0	1	0	120
y_3	1	3	0	0	1	240
	-2	-3	0	0	0	0.

Da -3 das betragsmäßig größte negative Element der Zielfunktionszeile ist und $80 = \frac{240}{3} < 120 < 200$ ist, ist $a_{32} = 3$ das Pivotelement im ersten Schritt. Durch Austausch der Basisvariable y_3 gegen die Nicht-Basisvariable x_2' erhält man als neues Tableau

	x_1	x_2'	y_1	y_2	y_3	
y_1	$\frac{5}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	120
y_2	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	40
x_2'	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	80
	-1	0	0	0	1	240.

Hier ist -1 einziges negatives Element der Zielfunktionszeile. Da $60 = \frac{40}{\frac{2}{3}} < 72 < 240$ ist, ist $a_{21} = \frac{2}{3}$ das neue Pivotelement. Der Austausch der Variable y_2 gegen x_1 führt auf

	x_1	x_2'	y_1	y_2	y_3	
y_1	0	0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	20
x_1	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	60
x_2'	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	60
	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	300.

In diesem Tableau stehen in der Zielfunktionszeile nur nichtnegative Elemente, d.h. der Algorithmus endet hier.
Wir lesen ab: Der optimale Wert des gegebenen Problems wird für

$$x_1 = 60,\ x_2' = 60$$

erreicht. Wir rücksubstituieren x_2' und erhalten als maximalen Wert der Zielfunktion

$$Z(x_1, x_2) = Z(60, -40) = 2 \cdot 60 - 3 \cdot (-40) + 80 = 320.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Es sei $\alpha \geq -1$. Dann ist $\det(A_\alpha) = 10 + 5\alpha > 0$, d.h. die Matrix A_α ist invertierbar mit

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{10 + 5\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -\alpha & 10 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilensummennorm von A_α bzw. A_α^{-1} ist gleich

$$\begin{aligned} \|A_\alpha\|_\infty &= \max\{10 + |-5|\,,\, |\alpha| + 1\} = \max\{15, |\alpha| + 1\}, \\ \|A_\alpha^{-1}\|_\infty &= \frac{1}{|10 + 5\alpha|} \max\{1 + 5,\, |-\alpha| + 10\} = \frac{10 + |\alpha|}{10 + 5\alpha}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Kondition von A_α bzgl. der $\|\,.\,\|_\infty$-Norm gegeben durch

$$\operatorname{cond}_\infty(A_\alpha) = \|A_\alpha\|_\infty \|A_\alpha^{-1}\|_\infty = \max\{15, |\alpha| + 1\} \frac{10 + |\alpha|}{10 + 5\alpha}.$$

b) Für $\alpha = 0$ gilt

$$\operatorname{cond}_\infty(A_0) = 15.$$

Nach Vorlesung lässt sich eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{cond}_\infty(DA_0) = \min\{\operatorname{cond}_\infty(\tilde{D}A_0)\ :\ \tilde{D}\ \text{Diagonalmatrix}\}.$$

folgendermaßen bestimmen: Wir setzen

$$d_1 = \frac{1}{|a_{11}| + |a_{12}|} = \frac{1}{10 + 5} = \frac{1}{15} \qquad \text{und} \qquad d_2 = \frac{1}{|a_{21}| + |a_{22}|} = \frac{1}{0 + 1} = 1.$$

Dann gilt

$$DA_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Determinante ist gegeben durch $\det(DA_0) = \frac{2}{3}$, und die Inverse ist gleich

$$(DA_0)^{-1} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilensummennorm von DA_0 bzw. $(DA_0)^{-1}$ ist somit

$$\begin{aligned} \|DA_0\|_\infty &= \max\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3},\, 1\right\} = 1, \\ \|(DA_0)^{-1}\|_\infty &= \max\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2},\, 0 + 1\} = 2. \end{aligned}$$

und für die Kondition von DA_0 bzgl. der $\|\,.\,\|_\infty$-Norm erhält man schließlich

$$\operatorname{cond}_\infty(DA_0) = \|DA_0\|_\infty \|(DA_0)^{-1}\|_\infty = 2.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Die Funktion F ist auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar mit

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

außerdem ist $\det(F'(x,y)) = e^y - xe^y$.

b) Das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Näherung einer Nullstelle (x^*, y^*) von F zum Startwert $(x_0, y_0) = (0,0)$ lässt sich folgendermaßen formulieren: Die $(k+1)$-te Iterierte an (x^*, y^*) berechnet sich durch

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - (F'(x_k, y_k))^{-1} F(x_k, y_k) \\ &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \frac{1}{(1-x_k)e^{y_k}} \begin{pmatrix} 1 & -x_k e^{y_k} \\ -1 & e^{y_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k e^{y_k} + 1 \\ x_k + y_k \end{pmatrix}, \qquad k = 0,1,2,\dots.\end{aligned}$$

Dabei werde die Konvergenz des Verfahrens gegen die Lösung (x^*, y^*) vorausgesetzt.
Für $(x_0, y_0) = (0,0)$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - (F'(x_0, y_0))^{-1} F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Für $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (1,0)$ ist $\det(F'(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)) = 0$, d.h. die Matrix $F'(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ ist singulär und der Wert $(1,0)$ ist nicht als Startwert geeignet.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Wir setzen $f : [1,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)}$. Mit der zusammengesetzten Trapezregel zur Schrittweite $h = 1$ erhalten wir die folgende Näherung des Integrals:

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{\ln(1+x)}\,dx &= \int_1^5 f(x)\,dx \\ &\approx \frac{1}{2}\left(f(1) + 2f(2) + 2f(3) + 2f(4) + f(5)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{2}\frac{1}{\ln 6} \\ &\approx 3.25332.\end{aligned}$$

b) Damit die gegebene Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt ist, muss sie insbesondere für die Monome $f(x) = 1$, $f(x) = x$ und $f(x) = x^2$ exakt sein. Setzt man diese in die Quadraturformel ein, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= a + b + c \\ 0 &= -a + c \\ \frac{2}{3} &= a + c. \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt $a = c = \frac{1}{3}$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so folgt hieraus $b = \frac{4}{3}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt ist, wenn sie nur für die Monome $f(x) = 1, f(x) = x$ und $f(x) = x^2$ exakt ist.
Bei der berechneten Quadraturformel

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \frac{1-(-1)}{6}\left(f(-1) + 4f\left(\frac{1+(-1)}{2}\right) + f(1)\right)$$

handelt es sich um die *Simpsonsche Regel*.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Wir setzen $f(x,y) := y - 2\frac{x}{y}$.

a) Das Eulersche Polygonzugverfahren für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x) - 2\frac{x}{y(x)}, \qquad y(0) = 1$$

lautet

$$\begin{aligned} x_n &:= n \cdot h, \qquad n \geq 0, \\ y_0 &:= y(x_0) = 1, \\ y_{n+1} &:= y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

Ist die Schrittweite $h = \frac{1}{3}$, so ist y_3 eine Näherung an $y(1) = y(3 \cdot \frac{1}{3}) = y(x_3)$. Wir berechnen die ersten drei Iterierten. Es ist

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + \frac{1}{3}f(0,1) = \frac{4}{3}, \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{29}{18}, \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = \frac{29}{18} + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}, \frac{29}{18}\right) = \frac{1466}{783} \approx 1.87229. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung des Anfangswertproblems ist $y : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ y(x) = \sqrt{2x+1}$, mit $y(1) = \sqrt{3} \approx 1.73205$.

b) Das klassische Runge-Kutta-Verfahren lautet

$$\begin{aligned} x_n &:= n \cdot h, \qquad n \geq 0, \\ y_0 &:= y(x_0) = 1, \\ y_{n+1} &:= y_n + h\phi(x_n, y_n, h), \qquad n \geq 0, \end{aligned}$$

mit $\phi(x,y,h) = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4$ und

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x,y), \\ k_2 &= f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1), \\ k_3 &= f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2), \\ k_4 &= f(x+h, y+hk_3). \end{aligned}$$

Ist die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$, so ist y_2 eine Näherung an $y(1) = y(2 \cdot \frac{1}{2}) = y(x_2)$.
Das klassische Runge-Kutta-Verfahren besitzt die Konsistenzordnung 4.