Aufgabe 1:

a) Führen Sie eine $LR-$Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

durch und geben Sie die Matrizen L, R mit $A = LR$ an.

b) Lösen Sie unter Verwendung der LR-Zerlegung von A das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit. Formulieren Sie in Pseudo-Code einen Algorithmus zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung von A.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Formulieren Sie in Pseudo-Code m Iterationen des $QR-$Verfahrens zur Berechnung der Eigenwerte von A. Der Code soll mit der Ausgabe der berechneten Eigenwertapproximationen enden.
Hinweis: Sie dürfen eine Funktion $QRdec$ zur Bestimmung der $QR-$Zerlegung einer Matrix verwenden.

Aufgabe 3:

Lösen Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\text{Maximiere} \quad 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 \qquad \text{unter den Nebenbedingungen}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq -3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0;\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Aufgabe 4:

Sei $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\mathrm{cond}_\infty(A)$ und $\mathrm{cond}_1(A)$.

b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft:

$$\mathrm{cond}_\infty(DA) = \min\{\mathrm{cond}_\infty(\tilde{D}A) \;:\; \tilde{D} \text{ Diagonalmatrix}\}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{cond}_\infty(DA)$.

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 5x - \cos(\sin(x))$ auf $(0,1)$ genau eine Nullstelle x^* besitzt.

b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung dieser Nullstelle und berechnen Sie die erste Iterierte zum Startwert $x^0 = 0$. Im Folgenden gelte stets $x^0 = 0$.

c) Berechnen Sie eine Konstante C mit

$$|x^k - x^*| \leq C \cdot |x^{k-1} - x^*|^2 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

d) Bestimmen Sie eine Konstante $L < 1$ mit der Eigenschaft

$$|x^k - x^*| \leq L^k \cdot |x^0 - x^*| \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Weisen Sie die Konvergenz des Newton-Verfahrens nach.

Aufgabe 6:

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Simpson-Regel eine Näherung für

$$\int_0^1 e^x \sin(x)\, dx\,.$$

Geben Sie eine obere Schranke für den absoluten Fehler an. Benutzen Sie hierzu die in der Vorlesung angegebene Fehlerdarstellung.

b) Bestimmen Sie eine Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)\, dx = a_0 f(0) + a_1 f(\tfrac{1}{3}) + a_2 f(1) + R(f)\,,$$

die für alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt ist. Berechnen Sie mit dieser Quadraturformel einen Näherungswert für das Integral aus a).

Aufgabe 7:

Sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x) - y(x)^2 + x, \qquad\qquad y(0) = 1$$

gegeben. Sie können ohne Beweis benutzen, dass dieses Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ besitzt. Berechnen Sie Näherungswerte für $y(1)$ unter Verwendung

a) des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$

b) des klassischen Runge–Kutta-Verfahrens zur Schrittweite $h = 1$.

Hinweis: Sie können wahlweise Bruchrechnung oder den Taschenrechner verwenden.