Musterlösung Aufgabe 1:

a) Der $LR-$Algorithmus liefert:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}-2&3&-1\\0&2&0\\0&4&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}-2&3&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Folglich ist die LR-Zerlegung von A gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2&3&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\\ &= \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-2&3&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\\ &= \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}}_{=:L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-2&3&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{=:R}\end{aligned}$$

b) Zunächst ist das lineare Gleichungssystem

$$Lz = b \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix} z = \begin{pmatrix}-5\\6\\-5\end{pmatrix}$$

zu lösen und durch Vorwärtssubstitution erhält man $z = (-5,-4,-2)^T$. Anschließend ist

$$Rx = z \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix}-2&3&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}-5\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

zu lösen und wir erhalten durch Rückwärtssubstitution

$$x = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

Musterlösung Aufgabe 2:

a)

```
Für i=1 bis n {
        l(i,i) = sqrt( a(i,i)- ∑_{k=1}^{i-1} l(i,k)*l(i,k));
        Für j=i+1 bis n {
                l(j,i) = ( a(j,i) - ∑_{k=1}^{i-1} l(j,k)*l(i,k) ) / l(i,i);
        }
}
```

b)

```
Für i=1 bis m {
        (Q,R) = QRdec(A);
        A = R· Q;
}
Für i=1 bis n {
        λ(i) = A(i,i);
}
Ausgabe: λ
```

Musterlösung Aufgabe 3:

Die Substitution $y_2 = 4 - x_2, y_i = x_i$ $(i = 1, 3)$ liefert das äquivalente Problem

$$\text{Maximiere} \quad 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 - 20 \qquad \text{unter den Nebenbedingungen}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

und es ergeben sich die Tableaus

$$\begin{array}{c|ccccc|c} y_4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ y_5 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ \hline & -3 & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} y_2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ y_5 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 2 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & \frac{15}{2} \end{array}$$

Die optimale Lösung ist also gegeben durch $(y_1, \ldots, y_5) = (0, \frac{7}{6}, \frac{2}{3}, 0, 0)$; dies entspricht

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
y_2 & \frac{7}{6} & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\
y_3 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\
\hline
 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{17}{2}
\end{array}$$

der optimalen Lösung

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{17}{6}, \frac{2}{3})$$
$$\text{Zielfunktionswert} = \frac{17}{2} - 20 = -\frac{23}{2}.$$

Musterlösung Aufgabe 4:

Es gilt $A^{-1} = \frac{1}{10-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$.

a)

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= \max(10+5, 1+1) = 15 \\
\|A^{-1}\|_\infty &= \|\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}\|_\infty = \frac{1}{5} \cdot \max\{1+5, 1+10\} = \frac{11}{5} \\
\text{cond}_\infty(A) &= \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 15 \cdot \frac{11}{5} = 33 \\
\|A\|_1 &= \max(10+1, 5+1) = 11 \\
\|A^{-1}\|_1 &= \|\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}\|_\infty = \frac{1}{5} \cdot \max\{1+1, 5+10\} = 3 \\
\text{cond}_1(A) &= \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 33
\end{aligned}$$

b) Eine optimale Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ ist nach Vorlesung gegeben durch:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{|a_{11}| + |a_{12}|} = \frac{1}{10+5} = \frac{1}{15} \\
d_2 &= \frac{1}{|a_{21}| + |a_{22}|} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dann gilt $\|DA\|_\infty = 1$ sowie

$$\begin{aligned}
\|(DA)^{-1}\|_\infty = \|A^{-1}D^{-1}\|_\infty &= \|\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\|_\infty \\
&= \frac{1}{5} \cdot \| \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ -15 & 20 \end{pmatrix} \|_\infty = \frac{1}{5} \cdot \max(15+10, 15+20)
\end{aligned}$$

$$= \frac{35}{5} = 7$$

Wir erhalten somit die optimale Kondition bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ durch

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und es gilt} \qquad \operatorname{cond}_\infty(DA) = 7$$

Musterlösung Aufgabe 5:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x - \cos(\sin(x)) \\ f'(x) &= 5 + \sin(\sin(x))\cos(x) \\ f''(x) &= \cos(\sin(x))\cos(x)^2 - \sin(\sin(x))\sin(x) \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$f(0) = 0 - \cos(0) = -1 \qquad\qquad f(1) = 5 - \cos(\sin(1)) \geq 4$$

Folglich existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von f in $(0,1)$. Aufgrund der strengen Monotonie von f, denn $f'(x) \geq 4$, handelt es sich um die einzige Nullstelle in $(0,1)$.

b) Die Iterationsvorschrift lautet

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} = x^k - \frac{5x^k - \cos(\sin(x^k))}{5 + \sin(\sin(x^k))\cos(x^k)}$$

Die erste Iterierte zum Startwert $x^0 = 0$ lautet:

$$x^1 = 0 - \frac{0 - \cos(\sin(0))}{5 + \sin(\sin(0))\cos(0)} = -\frac{-\cos(0)}{5 + \sin(0)\cos(0)} = -\frac{-1}{5} = \frac{1}{5}$$

c) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |5 + \sin(\sin(x))\cos(x)| \geq 5 - |\sin(\sin(x))\cos(x)| \geq 5 - 1 = 4 \\ |f''(x)| &= |\cos(\sin(x))\cos(x)^2 - \sin(\sin(x))\sin(x)| \leq 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$|x^k - x^*| \leq \frac{2}{2 \cdot 4}|x^{k-1} - x^*|^2 = \frac{1}{4}|x^{k-1} - x^*|^2$$

und wir erhalten als eine mögliche Wahl $C = \frac{1}{4}$.

d) Es gilt wegen $|x^0 - x^*| \leq 1$

$$|x^1 - x^*| \leq \frac{1}{4}|x^0 - x^*|^2 \leq \frac{1}{4}|x^0 - x^*|$$

Setzen wir also $L = \frac{1}{4}$, so gilt die Behauptung für $k = 1$ und es folgt induktiv

$$\begin{aligned}
|x^{k+1} - x^*| &\leq \frac{1}{4}|x^k - x^*|^2 \\
&\leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2k}|x^0 - x^*|^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1}|x^0 - x^*| \\
&\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}|x^0 - x^*| \\
&(= L^{k+1}|x_0 - x^*|)
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} L^k = 0$ gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, d.h. das Newton-Verfahren konvergiert.

Musterlösung Aufgabe 6:

a) Die Näherung lautet

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x \sin(x)\, dx &= \frac{1}{6}(e^0 \sin(0) + 4 \cdot e^{1/2} \sin(\frac{1}{2}) + e \sin(1) + R(f) \\
&= \frac{1}{6}(4e^{1/2} \sin(\frac{1}{2}) + e \sin(1)) + R(f) \\
&(\approx 0.9082 + R(f))
\end{aligned}$$

Für $f(x) = e^x \sin(x)$ gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x)) \\
f''(x) &= e^x \cdot 2\cos(x) \\
f'''(x) &= 2e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x)) \\
f^{(iv)}(x) &= -4e^x \cdot \sin(x)
\end{aligned}$$

Folglich gilt für den Fehler $R(f)$:

$$|R(f)| \leq \frac{1}{90}\left(\frac{1-0}{2}\right)^5 \cdot \max_{x\in[0,1]}|-4e^x \sin(x)| \leq \frac{4e}{90 \cdot 32} = \frac{e}{720} \quad (\approx 0.0038)$$

b) Für a_0, a_1, a_2 müssen die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 1\,dx = a_0 + a_1 + a_2 \\ \frac{1}{2} &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{3}a_1 + a_2 \\ \frac{1}{3} &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{9}a_1 + a_2 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet

$$(a_0, a_1, a_2) = (0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}).$$

Die Näherung des Integrals ist dann gegeben durch

$$\int_0^1 e^x \sin(x)\,dx \approx 0 + \frac{3}{4} \cdot e^{1/3} \sin(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4} \cdot e \sin(1) \quad (\approx 0.9143)$$

Musterlösung Aufgabe 7:

a) Die Verfahrensfunktion des Euler-Verfahrens lautet $\Phi(x, y, h) = f(x, y) = y - y^2 + x$ und die Iterationsvorschrift ist gegeben durch

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, h) = (1+h)y_k - hy_k^2 + hx_k = \frac{4}{3}y_k + \frac{1}{3}(\frac{k}{3} - y_k^2)$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{4}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (0 - 1^2) = 1 \\ y_2 &= \frac{4}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1^2) = \frac{10}{9} \\ y_3 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3} - \frac{100}{81}) = \frac{120}{81} + \frac{1}{3} \cdot \frac{54 - 100}{81} = \frac{360}{243} - \frac{46}{243} \\ &= \frac{314}{243} \approx 1.2922 \end{aligned}$$

b) Verfahrensfunktion: $\Phi(x, y, h) = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4$ mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 0 \\ k_2 &= f(x_0 + \frac{1}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2} \\ k_3 &= f(x_0 + \frac{1}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = f(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}) = \frac{3}{16} \quad (\approx 0.1875) \end{aligned}$$

$$k_4 = f(x_0 + 1, y_0 + k_3) = f(1, \frac{19}{16}) = \frac{199}{256} \quad (\approx 0.7773)$$

Wir erhalten als Näherungswert:

$$y(1) \approx 1 + 1 \cdot (\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4) \approx 1.3587$$