Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel

Sommersemester 2010
27.07.2010

MODULPRÜFUNG Numerische Methoden
(Höhere Mathematik IV für die Fachrichtung Meteorologie
bzw. Numerische Mathematik für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A.

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Beschreiben Sie das QR-Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte von A. Beschreiben Sie insbesondere, wie sich die Approximationen an die Eigenwerte ablesen lassen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Zielfunktion $Z(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 \le -10 \\ -2x_1 - 2x_2 + 7x_3 \ge 13 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 3. \end{cases}$$

Geben Sie den maximalen Wert von $Z(x_1, x_2, x_3)$ unter diesen Nebenbedingungen an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $\alpha \ge 1$ und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\mathrm{cond}_1(A_\alpha)$ für alle $\alpha \ge 1$.

b) Bestimmen Sie ein $\alpha_0 \ge 1$ mit

$$\mathrm{cond}_1(A_{\alpha_0}) = \min_{\alpha \ge 1} \mathrm{cond}_1(A_\alpha).$$

Hinweis: Die Matrixnorm $\|\,.\,\|_1$ (Spaltensummennorm) einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich berechnen durch

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x = \cos x$ eine Lösung x^* in $[0,1]$ besitzt.

b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung von x^* und führen Sie den ersten Iterationsschritt zum Startwert $x_0 = 0$ durch.

c) Formulieren Sie in Pseudo-Code einen Algorithmus, der zu einem vorgegebenen Startwert x_0 eine Näherung an x^* berechnet.
Der Algorithmus soll abbrechen, sobald der Fehler $|x_k - \cos x_k|$ im k-ten Schritt kleiner als 10^{-4} ist oder 100 Iterationsschritte durchgeführt wurden.

Hinweis: In den Aufgabenteilen b) und c) kann vorausgesetzt werden, dass die Gleichung $x = \cos x$ genau eine Lösung x^* in $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Simpson-Regel eine Näherung für

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + 1) \cos x \, dx.$$

b) Gegeben sei die Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{8}\left(f(0) + af(\frac{1}{3}) + 3f(x_1) + f(1)\right) + R(f)$$

mit $a, x_1 \in \mathbb{R}$; $R(f)$ bezeichne den Fehler der Quadraturformel.
Bestimmen Sie die Konstanten a und x_1 so, dass die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 1 exakt ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -xy(x) + 1, \qquad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie einen Näherungswert für $y(1)$ unter Verwendung

a) des Eulerschen Polygonzugverfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$;

b) des Verfahrens von Heun zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Die Existenz der Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ kann vorausgesetzt werden.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Freitag, den 20.08.2010, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus.
Die **Klausureinsicht** findet am Dienstag, den 19.10.2010, von 17:30 Uhr bis 18:30 Uhr im Raum 1C-04 (Allianz-Gebäude 05.20) statt.