Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel

Sommersemester 2010
30.08.2010

Bachelor-Modulprüfung Numerische Mathematik
für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\operatorname{cond}_\infty(A)$.

b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{cond}_\infty(DA) = \min\{\operatorname{cond}_\infty(\tilde{D}A) \,:\, \tilde{D}\,\text{Diagonalmatrix}\}.$$

Geben Sie $\operatorname{cond}_\infty(DA)$ an.

Hinweis: Die Matrixnorm $\|\,.\,\|_\infty$ (Zeilensummennorm) einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich berechnen durch

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \\ y - \frac{x}{4} - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass F genau zwei Nullstellen besitzt.

b) Berechnen Sie $F'(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $F'(x,y)$ singulär ist.

c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von F und führen Sie den ersten Iterationsschritt zum Startwert $(x_0, y_0) = (1,1)$ durch.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zur Schrittweite $h = 1$ eine Näherung für

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

b) Gegeben sei die Quadraturformel

$$\int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{4}(f(0) + 4f(\frac{a}{4}) + 2f(x_1) + f(a)) + R(f)$$

mit $a, x_1 \in \mathbb{R}$; $R(f)$ bezeichne den Fehler der Quadraturformel.
Bestimmen Sie die Konstanten a und x_1 so, dass die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 1 exakt ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 3xy(x) + 1, \qquad y(1) = 0.$$

Berechnen Sie einen Näherungswert für $y(2)$ unter Verwendung

a) des Eulerschen Polygonzugverfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$;

b) des Verfahrens von Heun zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

Die Existenz der Lösung $y : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ kann vorausgesetzt werden.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 12 \\ 0 & 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A.

b) Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig. Formulieren Sie in Pseudo-Code das LR-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte von A. Der Algorithmus soll abbrechen, sobald in einem Schritt die LR-Zerlegung nicht existiert oder 100 Iterationsschritte durchgeführt wurden. Am Ende sollen die Approximationen an die Eigenwerte von A ausgegeben werden.
Hinweis: Sie dürfen eine Funktion `LRdec(B)` verwenden, welche eine LR-Zerlegung der Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnet. Existiert keine derartige Zerlegung, so gibt die Funktion `LRdec(B)` die Meldung `error` zurück.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 4x_2 + 16$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \leq 2, \ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Geben Sie den maximalen Wert von $Z(x_1, x_2, x_3)$ unter diesen Nebenbedingungen an.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Freitag, den 10.09.2010, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus.
Die **Klausureinsicht** findet am Dienstag, den 19.10.2010, von 17:30 Uhr bis 18:30 Uhr im Raum 1C-04 (Allianz-Gebäude 05.20) statt.