Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel

Sommersemester 2010
30.08.2010

Bachelor-Modulprüfung Numerische Mathematik für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Es ist $\det(A) = 1 \cdot 8 - (-4) \cdot (-1) = 4$ und

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilensummennorm von A bzw. A^{-1} ist gleich

$$\|A\|_\infty = \max\{8 + |-4|\,,\, |-1| + 1\} = \max\{12, 2\} = 12,$$
$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{4}\max\{1+4,\, 1+8\} = \frac{9}{4}.$$

Folglich ist die Kondition von A bzgl. der $\|\,.\,\|_\infty$-Norm gegeben durch

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 12 \cdot \frac{9}{4} = 27.$$

b) Nach Vorlesung lässt sich eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{cond}_\infty(DA) = \min\{\mathrm{cond}_\infty(\tilde{D}A) \;:\; \tilde{D}\,\text{Diagonalmatrix}\}.$$

folgendermaßen bestimmen: Wir setzen

$$d_1 = \frac{1}{|a_{11}| + |a_{12}|} = \frac{1}{8+4} = \frac{1}{12} \qquad \text{und} \qquad d_2 = \frac{1}{|a_{21}| + |a_{22}|} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Dann gilt

$$DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

die Determinante ist gegeben durch $\det(DA) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$, und die Inverse ist gleich

$$(DA)^{-1} = 6\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilensummennorm von DA bzw. $(DA)^{-1}$ ist somit

$$\|DA\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right\} = 1,$$
$$\|(DA)^{-1}\|_\infty = \max\{3+2,\, 3+4\} = 7.$$

und für die Kondition von DA bzgl. der $\|\,.\,\|_\infty$-Norm erhält man schließlich

$$\mathrm{cond}_\infty(DA) = \|DA\|_\infty \|(DA)^{-1}\|_\infty = 7.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Es ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann eine Nullstelle von F, wenn die beiden Gleichungen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

$$y - \frac{x}{4} - 1 = 0 \tag{2}$$

erfüllt sind. Die Gleichung (2) ist äquivalent zu $y = 1 + \frac{x}{4}$. Setzt man dies in die Gleichung (1) ein, so erhält man

$$\frac{x^2}{4} + (1 + \frac{x}{4})^2 - 1 = x(\frac{5}{16}x + \frac{1}{2}) = 0.$$

Hieraus liest man ab: Die Funktion F besitzt genau die zwei Nullstellen $(x,y) = (0,1)$ und $(x,y) = (-\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$.

b) Die Funktion F ist auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar mit

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & 2y \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

außerdem ist $\det(F'(x,y)) = \frac{x}{2} \cdot 1 - 2y \cdot (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}(x+y)$. Folglich ist $F'(x,y)$ genau dann singulär, wenn $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$ ist.

c) Nach b) lässt sich das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Näherung einer Nullstelle (x^*, y^*) von F zum Startwert $(x_0, y_0) = (1,1)$ formulieren: Die $k+1$-te Iterierte an (x^*, y^*) berechnet sich durch

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - (F'(x_k, y_k))^{-1} F(x_k, y_k) \\
&= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \frac{2}{x_k + y_k} \begin{pmatrix} 1 & -2y_k \\ \frac{1}{4} & \frac{x_k}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_k^2}{4} + y_k^2 - 1 \\ y_k - \frac{x_k}{4} - 1 \end{pmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Dabei werde die Konvergenz des Verfahrens gegen die Lösung (x^*, y^*) vorausgesetzt.
Für $(x_0, y_0) = (1,1)$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - (F'(x_0, y_0))^{-1} F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{17}{16} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Wir setzen $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Mit der zusammengesetzten Trapez-Regel zur Schrittweite $h = 1$ erhalten wir die folgende Näherung des Integrals:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx &= \int_{-2}^{2} f(x)\, dx \\
&\approx \frac{1}{2} \left(f(-2) + 2f(-1) + 2f(0) + 2f(1) + f(2) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{2} + 1 \\
&\approx 2.861427.
\end{aligned}$$

b) Damit die gegebene Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 1 exakt ist, muss sie insbesondere für die Monome $f(x) = 1$ und $f(x) = x$ exakt sein. Setzt man diese in die Quadraturformel ein, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}(1+4+2+1) \\ \frac{1}{2}a^2 &= \frac{1}{4}(0+4\cdot\frac{a}{4}+2\cdot x_1+a). \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $a = 2$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so folgt hieraus $2 = \frac{1}{4}(2+2x_1+2)$ und somit $x_1 = 2$.
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 1 exakt ist, wenn sie nur für die Monome $f(x) = 1$ und $f(x) = x$ exakt ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir setzen $f(x, y) := 3xy + 1$.

a) Das Eulersche Polygonzugverfahren für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 3xy(x) + 1, \qquad y(1) = 0$$

lautet

$$\begin{aligned} x_n &:= 1 + n\cdot h, \qquad n \geq 0, \\ y_0 &:= y(x_0) = 0, \\ y_{n+1} &:= y_n + h\cdot f(x_n, y_n), \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

Ist die Schrittweite $h = \frac{1}{3}$, so ist y_3 eine Näherung an $y(2) = y(1 + 3\cdot\frac{1}{3}) = y(x_3)$. Wir berechnen die ersten drei Iterierten. Es ist

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = \frac{1}{3}f(1, 0) = \frac{1}{3}, \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}f\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{9}, \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = \frac{10}{9} + \frac{1}{3}f\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{9}\right) = \frac{89}{27} \approx 3.296296. \end{aligned}$$

b) Das Verfahren von Heun für das gegebene Anfangswertproblem lautet

$$\begin{aligned} x_n &:= 1 + n\cdot h, \qquad n \geq 0, \\ y_0 &:= y(x_0) = 0, \\ y_{n+1} &:= y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\right), \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

Ist die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$, so ist y_2 eine Näherung an $y(2) = y(1 + 2\cdot\frac{1}{2}) = y(x_2)$. Wir berechnen die ersten zwei Iterierten. Es ist

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f(1, 0) + f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}(1 + \frac{13}{4}) = \frac{17}{16}, \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1) + f(x_1 + h, y_1 + hf(x_1, y_1))\right) \\ &= \frac{17}{16} + \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{16}\right) + f\left(2, \frac{253}{64}\right)\right) \\ &= \frac{17}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{185}{32} + \frac{791}{32}\right) = \frac{139}{16} = 8.6875. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Wir bestimmen zunächst die QR-Zerlegung der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

Die Householder-Transformation, welche den ersten Spaltenvektor $b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ der Matrix B auf ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbildet, berechnet sich folgendermaßen: Wir setzen

$$\alpha := -\|b_1\|_2 \cdot \operatorname{sgn}(b_{11}) = -\sqrt{25+144} \cdot \operatorname{sgn}(-5) = 13.$$

Dann ist $\|b_1 - \alpha e_1\|_2 = \|\begin{pmatrix} -18 \\ 12 \end{pmatrix}\|_2 = 6\|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\|_2 = 6\sqrt{13}$. Setzt man nun

$$w := \frac{a_1 - \alpha e_1}{\|a_1 - \alpha e_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

so ist die Householder-Transformation gegeben durch

$$H := E - 2ww^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{13} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wählt man $Q_1 := H$ und

$$R_1 := HB = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 169 & -120 \\ 0 & 119 \end{pmatrix},$$

so gilt wegen $H^2 = E$

$$B = Q_1 R_1,$$

wobei R_1 eine obere Dreiecksmatrix und Q_1 eine unitäre Matrix ist.
Um schließlich eine QR-Zerlegung zu erhalten, setzen wir

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_1}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_1}} \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A = QR$, wobei wiederum R eine obere Dreiecksmatrix und Q eine unitäre Matrix ist.

b) In Pseudo-Code kann das Verfahren folgendermaßen formuliert werden:

```
input A
for (i=1..100)
{
    if (LRdec(A)=error)
    {
       break;
    }
    [L,R] = LRdec(A);
    A=R*L;
}
x=diag(A);
output x
```

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Wir bestimmen den maximalen Wert von $Z(x_1, x_2, x_3)$ mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Um das gegebene Optimierungsproblem in ein Standardmodell zu überführen, substituieren wir $x_2' = 2 - x_2$. Außerdem multiplizieren wir die erste Nebenbedingung mit (-1), damit das Standardmodell in Normalform vorliegt. Dann ist das gegebene Problem äquivalent zu

$$Z(x_1, x_2', x_3) = 2x_1 + 4x_2' + 8$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2' - 4x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2' + 2x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Das Ausgangstableau des Simplex-Algorithmus lautet also

	x_1	x_2'	x_3	y_1	y_2	
y_1	6	2	-4	1	0	6
y_2	1	1	2	0	1	8
	-2	-4	0	0	0	0.

Da -4 das betragsmäßig größte negative Element der Zielfunktionszeile ist und $3 = \frac{6}{2} < \frac{8}{1} = 8$ ist, ist $a_{12} = 2$ das Pivotelement im ersten Schritt. Durch Austausch der Basisvariable y_1 gegen die Nicht-Basisvariable x_2' erhält man als neues Tableau

	x_1	x_2'	x_3	y_1	y_2	
x_2'	3	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	3
y_2	-2	0	4	-$\frac{1}{2}$	1	5
	10	0	-8	2	0	12.

Hier ist -8 einziges negatives Element der Zielfunktionszeile. Da außerdem a_{23} das einzige positive Element in der dritten Spalte ist, ist $a_{23} = 4$ das neue Pivotelement. Der Austausch der Variable y_2 gegen x_3 führt auf

	x_1	x_2'	x_3	y_1	y_2	
x_2'	2	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$
x_3	-$\frac{1}{2}$	0	1	-$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
	6	0	0	1	2	22.

In diesem Tableau stehen in der Zielfunktionszeile nur nichtnegative Elemente, d.h. der Algorithmus endet hier.
Wir lesen ab: Der optimale Wert des gegebenen Problems wird für

$$x_1 = 0,\ x_2' = \frac{11}{2},\ x_3 = \frac{5}{4}$$

erreicht. Wir rücksubstituieren x_2' und erhalten als maximalen Wert der Zielfunktion

$$Z(x_1, x_2, x_3) = Z(0, -\frac{7}{2}, \frac{5}{4}) = 2 \cdot 0 + -4 \cdot (-\frac{7}{2}) + 16 = 30.$$