Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel

Sommersemester 2010
27.07.2010

MODULPRÜFUNG Numerische Methoden
(Höhere Mathematik IV für die Fachrichtung Meteorologie bzw. Numerische Mathematik für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen)

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Die Householder-Transformation, welche den ersten Spaltenvektor $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Matrix A auf ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbildet, berechnet sich folgendermaßen:
Wir setzen

$$\alpha := -\|a_1\|_2 \cdot \operatorname{sgn}(a_{11}) = -\sqrt{16+9} \cdot \operatorname{sgn} 4 = -5.$$

Dann ist $\|a_1 - \alpha e_1\|_2 = \|\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}\|_2 = 3\|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\|_2 = 3\sqrt{10}$. Setzt man nun

$$w := \frac{a_1 - \alpha e_1}{\|a_1 - \alpha e_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so ist die Householder-Transformation gegeben durch

$$H := E - 2ww^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{10} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählt man $Q := H$ und

$$R := HA = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -25 & -24 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},$$

so gilt wegen $H^2 = E$

$$A = QR,$$

wobei R eine obere Dreiecksmatrix und Q eine unitäre Matrix ist.

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix. Setze $A_1 := A$.
Iteration: Für $k = 1, 2, \ldots$ zerlege A_k:

$$A_k =: Q_k R_k,$$

wobei Q_k unitär und R_k obere Dreiecksmatrix ist, und berechne

$$A_{k+1} := R_k Q_k.$$

Breche die Iteration ab, wenn die Komponenten von A_{k+1} unterhalb der Diagonalen dem Betrag nach kleiner als eine gegebene Fehlerschranke sind.
Konvergiert das QR-Verfahren, so stehen die Approximationen an die Eigenwerte von A im k-ten Schritt auf der Diagonalen von A^k.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir bestimmen den maximalen Wert von $Z(x_1, x_2, x_3)$ mit Hilfe des Simplex-Algorithmus. Um das gegebene Optimierungsproblem in ein Standardmodell zu überführen, substituieren wir $x_3' = 3 - x_3$. Außerdem multiplizieren wir die zweite Nebenbedingung mit (-1), damit das Standardmodell in Normalform vorliegt. Dann ist das gegebene Problem äquivalent zu

$$Z(x_1, x_2, x_3') = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3' - 2$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3' \leq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3' \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0. \end{cases}$$

Das Ausgangstableau des Simplex-Algorithmus lautet also

	x_1	x_2	x_3'	y_1	y_2	
y_1	2	1	4	1	0	2
y_2	2	2	7	0	1	8
	-4	-3	-2	0	0	0.

Da -4 das betragsmäßig größte negative Element der Zielfunktionszeile ist und $1 = \frac{2}{2} < \frac{8}{2} = 4$ ist, ist $a_{11} = 2$ das Pivotelement im ersten Schritt. Durch Austausch der Basisvariable y_1 gegen die Nicht-Basisvariable x_1 erhält man als neues Tableau

	x_1	x_2	x_3'	y_1	y_2	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	1
y_2	0	1	3	-1	1	6
	0	-1	6	2	0	4.

Hier ist -1 einziges negatives Element der Zielfunktionszeile. Da $2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} < \frac{6}{1} = 6$ ist, ist $a_{12} = \frac{1}{2}$ das neue Pivotelement. Der Austausch der Variable x_1 gegen x_2 führt auf

	x_1	x_2	x_3'	y_1	y_2	
x_2	2	1	4	1	0	2
y_2	-2	0	-1	-2	1	4
	2	0	10	3	0	6.

In diesem Tableau stehen in der Zielfunktionszeile nur nichtnegative Elemente, d.h. der Algorithmus endet hier.
Wir lesen ab: Der optimale Wert des gegebenen Problems wird für

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3' = 0$$

erreicht. Wir rücksubstituieren x_3' und erhalten als maximalen Wert der Zielfunktion

$$Z(x_1, x_2, x_3) = Z(0, 2, 3) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 4 = 4.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Es sei $\alpha \geq 1$. Dann ist $\det(A_\alpha) = \alpha - 1 + 1 = \alpha > 0$ und

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltensummennorm von A_α bzw. A_α^{-1} ist wegen $\alpha - 1 \geq 0$ gleich

$$\begin{aligned}\|A_\alpha\|_1 &= \max\{1+1,\ |-1| + |\alpha - 1|\} = \max\{2, 1+\alpha-1\} = \max\{2,\alpha\},\\ \|A_\alpha^{-1}\|_1 &= \frac{1}{\alpha}\max\{|\alpha-1| + |-1|\,,\ 1+1\} = \frac{1}{\alpha}\max\{\alpha, 2\}.\end{aligned}$$

Folglich ist die Kondition von A_α bzgl. der $\|\,.\,\|_1$-Norm gegeben durch

$$\mathrm{cond}_1(A_\alpha) = \|A_\alpha\|_1 \|A_\alpha^{-1}\|_1 = \frac{1}{\alpha}\left(\max\{\alpha,2\}\right)^2.$$

b) Ist $\alpha \geq 2$, so gilt

$$\mathrm{cond}_1(A_\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\max\{\alpha,2\}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha \geq 2.$$

Gilt andererseits $1 \leq \alpha \leq 2$, so ist

$$\mathrm{cond}_1(A_\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(\max\{\alpha,2\}\right)^2 = \frac{2^2}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} \geq \frac{4}{2} = 2.$$

Somit gilt für alle $\alpha \geq 1$

$$2 = \mathrm{cond}_1(A_2) \leq \mathrm{cond}_1(A_\alpha),$$

das Minimum wird für $\alpha_0 = 2$ angenommen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir setzen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x - \cos x$. Es ist x^* genau dann eine Lösung der Gleichung $x = \cos x$, wenn $f(x^*) = 0$ ist.

a) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ stetig, außerdem ist $f(0) = -1$ und $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x^* \in (0,1)$ mit $f(x^*) = 0$.

b) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 1 + \sin x,\ x \in \mathbb{R}$. Ist $x \in [0,1]$, so ist $f'(x) \neq 0$. Somit lässt sich das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Näherung an x^* bei gegebenem Startwert $x_0 \in [0,1]$ formulieren: Die $k+1$-te Iterierte an x^* berechnet sich durch

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\\ &= x_k - \frac{x_k - \cos x_k}{1 + \sin x_k}, \qquad k = 0,1,2,\ldots.\end{aligned}$$

Dabei werde die Konvergenz des Verfahrens gegen die Lösung x^* vorausgesetzt.
Für x_0 ergibt sich

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - \cos x_0}{1 + \sin x_0} = 0 - \frac{0 - \cos 0}{1 + \sin 0} = 1.$$

c) In Pseudo-Code kann das Verfahren folgendermaßen formuliert werden:

```
input x0
x=x0;
i=0;
while (abs(x-cos(x))>=10E-4 and i<=100)
{

    x = x-(x-cos(x))/(1+sin(x));
    i = i+1;
}

output x
```

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Wir setzen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+1)\cos x$. Mit der Simpson-Regel erhalten wir die folgende Näherung des Integrals:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (x^2+1)\cos x\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&\approx \frac{\pi-(-\pi)}{6}\left(f(-\pi)+4f\left(\frac{-\pi+\pi}{2}\right)+f(\pi)\right) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(f(-\pi)+4f(0)+f(\pi)\right) \\
&= \frac{\pi}{3}\left((\pi^2+1)\cos(-\pi)+4\cos(0)+(\pi^2+1)\cos(\pi)\right) \\
&= \frac{2}{3}\pi(2-(\pi^2+1)) \\
&\approx -18.576456.
\end{aligned}$$

b) Damit die gegebene Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 1 exakt ist, muss sie insbesondere für die Monome $f(x) = 1$ und $f(x) = x$ exakt sein. Setzt man diese in die Quadraturformel ein, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{8}(1+a+3+1) \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{8}(0+a\cdot\frac{1}{3}+3\cdot x_1+1).
\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $a = 3$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so folgt hieraus $x_1 = \frac{2}{3}$.
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Quadraturformel für alle Polynome vom Grad ≤ 1 exakt ist, wenn sie nur für die Monome $f(x) = 1$ und $f(x) = x$ exakt ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Wir setzen $f(x, y) := -xy + 1$.

a) Das Eulersche Polygonzugverfahren für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -xy(x) + 1, \qquad y(0) = 1$$

lautet

$$\begin{aligned}
x_n &:= n\cdot h, \qquad n \geq 0, \\
y_0 &:= y(x_0) = 1, \\
y_{n+1} &:= y_n + h\cdot f(x_n, y_n), \qquad n \geq 0.
\end{aligned}$$

Ist die Schrittweite $h = \frac{1}{3}$, so ist y_3 eine Näherung an $y(1) = y(3\cdot\frac{1}{3}) = y(x_3)$. Wir berechnen die ersten drei Iterierten. Es ist

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + \frac{1}{3}f(0,1) = \frac{4}{3}, \\
y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{41}{27}, \\
y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = \frac{41}{27} + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}, \frac{41}{27}\right) = \frac{368}{243} \approx 1.514403.
\end{aligned}$$

b) Das Verfahren von Heun für das gegebene Anfangswertproblem lautet

$$\begin{aligned} x_n &:= n \cdot h, \qquad n \geq 0, \\ y_0 &:= y(x_0) = 1, \\ y_{n+1} &:= y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\right), \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

Ist die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$, so ist y_2 eine Näherung an $y(1) = y(2 \cdot \frac{1}{2}) = y(x_2)$. Wir berechnen die ersten zwei Iterierten. Es ist

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))\right) \\ &= 1 + \frac{1}{4}\left(f(0,1) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{4}) = \frac{21}{16}, \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1) + f(x_1 + h, y_1 + hf(x_1, y_1))\right) \\ &= \frac{21}{16} + \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{2}, \frac{21}{16}\right) + f\left(1, \frac{95}{64}\right)\right) \\ &= \frac{21}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{11}{32} - \frac{31}{64}\right) = \frac{327}{256} \approx 1.277344. \end{aligned}$$