Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Robin Flohr

Lösungsvorschlag Numerische Methoden Prüfung

Sommersemester 2014 - 04.09.2014

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie, Geoinformatik)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Die LR-Zerlegung mit Pivotisierung liefert die folgenden Matrizen. Jede mögliche Wahl von $P_{1,2}$ war zulässig. Die Ausgangsmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der erste Schritt liefert die Matrizen

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_1A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L_1P_1A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -\frac{19}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

und der zweite und letzte Schritt liefert

$$P_2 = I,\ L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{19} & 1 \end{pmatrix},\ R := L_2P_2L_1P_1A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -\frac{19}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{68}{19} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix L ergibt sich aus den Matrizen L_1, L_2, welche durch ein Vorzeichenwechsel des einzigen nicht-diagonal Elements invertiert werden können, durch

$$L = L_1^{-1}L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{19} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{19} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix P ist in diesem Fall gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Um mit Hilfe dieser Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ay = b$ zu lösen, verwenden wir folgende äquivalente Umformungen

$$Ay = b \iff PAy = Pb \iff LRy = Pb,$$

wobei $PA = LR$ verwendet wurde. Dies führt uns zu

$$\begin{aligned} Lx &= Pb, \\ Ry &= x. \end{aligned}$$

Für die erste Vorwärtsauflösung des Systems $Lx = Pb$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{19} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

erhält man $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{37}{19} \end{pmatrix}$. Bei dem zweiten System $Ry = x$, also

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -\frac{19}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{68}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{37}{19} \end{pmatrix},$$

muss laut Aufgabenstellung nur der letzte Wert bestimmt werden und ergibt $y_3 = \frac{37}{68}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Die ersten zwei Schritte der von-Mises Iteration lauten wie folgt

$$z^1 = Ax^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \frac{z^1}{z_1^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix};$$
$$x^2 = Ax^1 = \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}, \quad x^2 = \frac{z^2}{z_1^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

Die Näherung im zweiten Schritt ergibt sich durch $z_{i_k}^{k+1} \to \lambda_1 = 4, k = 1$, also $z_1^2 = \frac{18}{5} = 3.6$ mit dem absoluten Fehler $|\lambda_1 - z_1^2| = 4 - 3.6 = 0.4$.

b) Die inverse Iteration von Wielandt wird wie folgt durchgeführt

$$w^1 = A^{-1}y^0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \quad y^1 = \frac{w^1}{w_1^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix};$$
$$w^2 = A^{-1}y^1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} \\ -\frac{1}{20} \end{pmatrix}, \quad y^2 = \frac{w^2}{w_1^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Die Näherung im zweiten Schritt ergibt sich durch $w_{i_k}^{k+1} \to \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}, k = 1$, also $\frac{1}{w_{i_k}^{k+1}} \to \lambda_2 = 2$ mit $\frac{1}{w_1^2} = \frac{20}{7}$. Der absolute Fehler ergibt $|\lambda_2 - \frac{1}{w_1^2}| = \frac{14}{7} - \frac{20}{7} = \frac{6}{7}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Als Substitution für die Variablen wird $\tilde{x}_1 = -x_1$ und $\tilde{x}_2 = x_2 - 20$ verwendet, damit $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0$. Dies liefert uns als neue Zielfunktion $\tilde{Z}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 5\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 - 50$ und als Anfangstableau

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	
y_1	-1	4	1	0	0	80
y_2	6	2	0	1	0	20
y_3	1	-5	0	0	1	60
	-5	2	0	0	0	0.

Die -5 ist der einzige negative Eintrag der Zielfunktionszeile und somit die Pivotspalte. Die Pivotzeile ist die zweite Zeile und somit 6 das Pivotelement, weil $\frac{20}{6} < \frac{60}{1}$. Das nächste Tableau ergibt sich somit als

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	
y_1	0	$\frac{13}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{250}{3}$
$\tilde{x}_1$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{10}{3}$
y_3	0	$-\frac{16}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{170}{6}$
	0	$\frac{22}{6}$	0	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{50}{3}$.

Da in der Zielfunktionszeile kein negativer Eintrag mehr vorhanden ist, bricht der Simplex mit der optimalen Lösung $\tilde{x}_1 = \frac{10}{3}, \tilde{x}_2 = 0$ ab. Diese Werte zurück substituiert ergibt $x_1 = -\frac{10}{3}, x_2 = 20$ mit dem maximalen Wert der Zielfunktion $Z(-\frac{10}{3}, 20) = -\frac{100}{3}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Die Simpsonregel lautet

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

und ergibt somit die Näherung

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2+1}dx &\approx \frac{2+1}{6}\left(\frac{1}{2} + 4f(\frac{-1+2}{2}) + f(2)\right)\\ &= \frac{3}{6}\left(\frac{1}{2} + 4\frac{1}{\frac{5}{4}} + \frac{1}{5}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5+32+2}{10}\right)\\ &= \frac{39}{20} = 1.95.\end{aligned}$$

Der absolute Fehler beträgt

$$|\arctan(2) - \arctan(-1) - 1.95| \approx 0.06.$$

b) Es genüg die Exaktheit für Monome vom Grad ≤ 1 zu fordern, also der Gleichung

$$af(-1) + f(0) + cf(2) = \int_{-1}^2 f(x)dx.$$

Setzt man dort die Monome x^0, x^1 ein, führt dies zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + 1 + b &= 3\\ -a + 0 + 2b &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystem ist gegeben durch

$$a = \frac{5}{6}, \quad b = \frac{7}{6}$$

und führt uns zu der Formel

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{5}{6}f(-1) + f(0) + \frac{7}{6}f(2) + R(f).$$

Als Näherung erhalten wir

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2+1}dx \approx \frac{5}{6}\frac{1}{2} + 1 + \frac{7}{6}\frac{1}{5}$$
$$= \frac{33}{20} = 1.65.$$

Der absolute Fehler beträgt ungefähr $|1.89 - 1.65| = 0.24$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Das Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ für $f(x) = 24\frac{x}{1+y}$ lautet

$$y^{i+1} = y^i + \frac{1}{3}f(x^i, y^i) = y^i + 8\frac{x^i}{1+y^i},$$

wobei der Index $i = 1, 2, 3$ durchläuft und der Anfangswert ist $y^0 = y(0) = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} y^1 &= 0 + 8\frac{0}{1+0} = 0 \\ y^2 &= 0 + 8\frac{\frac{1}{3}}{1+0} = \frac{8}{3} \\ y^3 &= \frac{8}{3} + 8\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{8}{3}} \\ &= \frac{88}{33} + \frac{48}{33} = \frac{136}{33} \end{aligned}$$

b) Das 2-stufigen Runge-Kutta-Verfahren mit $\beta = \frac{1}{2}$ (Verfahren von Heun) besitzt die Verfahrensfunktion

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{2}\big(f(x, y) + f(x+h, y + hf(x, y))\big)$$

und ergibt mit $h = \frac{1}{2}$ die Rekursion

$$\begin{aligned} y^{i+1} &= y^i + h\Phi(x, y, h) \\ &= y^i + \frac{1}{4}\left(f(x^i, y^i) + f(x^i + h, y^i + hf(x^i, y^i))\right) \\ &= y^i + 6\frac{x^i}{1+y^i} + 6\frac{x^i + \frac{1}{2}}{1 + y^i + 12\frac{x^i}{1+y^i}}. \end{aligned}$$

Der Anfangswert beträgt $y^0 = 0$ und die Rekursion ergibt

$$\begin{aligned} y^1 &= 0 + 0 + 6\frac{\frac{1}{2}}{1+0+0} = 3 \\ y^2 &= 3 + 6\frac{\frac{1}{2}}{1+3} + 6\frac{1}{1+3+12\frac{\frac{1}{2}}{1+3}} \\ &= 3 + \frac{3}{4} + \frac{6}{4+\frac{6}{4}} \\ &= \frac{15}{4} + 6\frac{4}{22} = \frac{213}{44}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

a) Weil $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vorausgesetzt wurde, kann die Taylorentwicklung jeweils bis zum folgenden Glied durchgeführt werden

$$\begin{aligned} y(x_i + h) &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \mathcal{O}(h^3); \\ y(x_i - h) &= y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

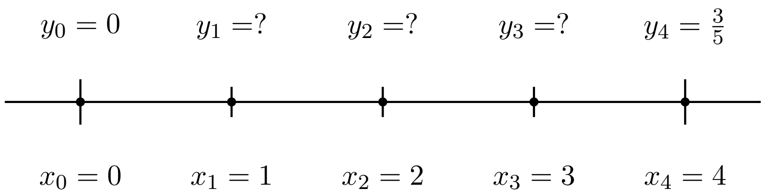
Setzen wir dies in die gegeben Formel für den zentralen Differenzenquotienten ein erhalten wir die quadratische Konvergenz durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h}\big(y(x_i + h) - y(x_i - h)\big) &= \frac{1}{2h}\left(2hy'(x_i) + \mathcal{O}(h^3)\right) \\ &= y'(x_i) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

b) Die Diskretisierung der zweiten Ableitung mittels des zweiten Differenzen ist durch

$$y''(x_i) = \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2}$$

gegeben. Folgende Skizze veranschaulicht die Diskretisierung des Gebietes.



Dabei ist, wie zu erkennen, nur y_1, y_2, y_3 gesucht und die Randwerte wie gekennzeichnet durch die Aufgabenstellung gegeben. Dies bedeutet, dass wir ein lineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten und 3 Gleichungen suchen. Schauen wir uns die gegebene Differentialgleichung an und diskretisieren wir das Problem mit den gegebenen Mitteln, erhalten wir mit $h = 1$

$$\begin{aligned} -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 8\frac{1}{2h}\big(y_{i+1} - y_{i-1}\big) &= 4 - 2x_i; \\ -y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1} - 4y_{i+1} + 4y_{i-1} &= 4 - 2x_i; \\ -5y_{i+1} + 2y_i + 3y_{i-1} &= 4 - 2x_i \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3$. Dies führt uns mit den Randwerten $\gamma_a = 0, \gamma_b = \frac{3}{5}$ auf das lineare Gleichungssystem von Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\gamma_a + 4 - 2x_1 \\ 4 - 2x_2 \\ 5\gamma_b + 4 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Laut Aufgabenstellung genügt es, nur das Gleichungssystem herzuleiten. Das Lösen des linearen Gleichungssystems ist also nicht Bestandteil dieser Aufgabe.