Lösungsvorschlag Numerische Methoden Prüfung

Wintersemester 2014/15 - 18.03.2015

(Elektrotechnik, Meteorologie, Geodäsie, Geoinformatik)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Die Cholesky-Zerlegung von A liefert die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{37}{4} & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; L_1 A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \; A_2 = L_1 A L_1^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \; L_2 A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; L_2 A_2 L_2^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = D$$

Also $L_2 L_1 A L_1^\top L_2^\top = D$, woraus $A = (L_1^{-1} L_2^{-1} \sqrt{D})(\sqrt{D}(L_2^\top)^{-1}(L_1^\top)^{-1}) =: LL^\top$ folgt. Die Matrixen ergeben

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \sqrt{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ sowie } L^\top = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt $A = LL^\top, Lw = b, L^\top y = w$ mit $b = \begin{pmatrix} -24 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Als erstes ergibt $Lw = b$ den Vektor $w = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$ und danach $L^\top y = w$ den Vektor $y = \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$, wobei für die Aufgabe nur nach $y_3 = 15$ gefragt war.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Der betragsmäßig größte Eigenwert einer gegebenen diagonalisierbaren, regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ lässt sich mit Hilfe der von-Mises Iteration approximieren. Der folgende, in Pseudo-Code formulierte Algorithmus liefert zu gegebenem Startvektor `x0` eine solche Approximation.

```
input x0, A
m=length(A);
x=x0;
z=zeros(m,1);
k=0;
k_alt=0;
for (i=1 to 100)
{

    k_alt=k;
    z = A * x;
    k = max(abs(z));
    x= z/z(k);
}

output z(k_alt)
```

b) Die inverse Iteration von Wielandt wird wie folgt durchgeführt

$$
\begin{aligned}
w^1 &= A^{-1}y^0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, & y^1 &= \frac{w^1}{w_1^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}; \\
w^2 &= A^{-1}y^1 = \begin{pmatrix} \frac{28}{5} \\ \frac{26}{5} \end{pmatrix}, & y^2 &= \frac{w^2}{w_1^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{14} \end{pmatrix}; \\
w^3 &= A^{-1}y^2 = \begin{pmatrix} \frac{41}{7} \\ \frac{40}{7} \end{pmatrix}, & y^3 &= \frac{w^3}{w_1^3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{40}{41} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Die Näherung im dritten Schritt ergibt sich durch $w_{i_k}^{k+1} \to \frac{1}{\lambda_2} = 6, k = 1$, also $\frac{1}{w_{i_k}^{k+1}} \to \lambda_2 = \frac{1}{6}$ mit $\frac{1}{w_1^3} = \frac{7}{41}$. Der absolute Fehler ergibt $|\lambda_2 - \frac{1}{w_1^3}| = \frac{1}{6} - \frac{7}{41} = \frac{1}{246} \approx 0{,}004$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Als Substitution für die Variablen wird $\tilde{x}_1 = x_1 - 10$, $\tilde{x}_2 = -x_2$ und $\tilde{x}_3 = -x_3$ verwendet, damit $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \geq 0$ gilt. Dies liefert uns als neue Zielfunktion $\tilde{Z}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 5\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3 + 70$ und als Anfangstableau

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	y_1	y_2	y_3	
y_1	2	-3	4	1	0	0	10
y_2	1	-5	0	0	1	0	50
y_3	1	-6	12	0	0	1	120
	-5	-1	-2	0	0	0	0.

Die -5 ist der betragsmäßig größte negative Eintrag der Zielfunktionszeile und somit die Pivotspalte. Die Pivotzeile ist die erste Zeile und somit 2 das Pivotelement, weil $\frac{10}{2} < 50 < 120$. Das nächste Tableau ergibt sich somit als

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	$-\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	0	5
y_2	0	$-\frac{7}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	0	45
y_3	0	$-\frac{9}{2}$	10	$-\frac{1}{2}$	0	1	115
	0	$-\frac{17}{2}$	8	$\frac{5}{2}$	0	0	95.

Der einzige negative Eintrag in der Zielfunktionszeile ist $-\frac{17}{2}$ und somit die Pivotspalte. Da aber nur negative Einträge in dieser Zeile vorliegen, bricht der Algorithmus ab, da $\tilde{x}_2$ beliebig groß werden kann (also auch die Zielfunktion) und somit keine optimale Lösung existiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Die zusammengesetzte Trapezregel lautet

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(a+h) + \cdots + 2f(b-h) + f(b)\right)$$

und ergibt mit $h = 1$ sowie $f(x) = x^2 + \frac{x}{x+4}$ die Näherung

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{1} x^2 + \frac{x}{x+4} dx &\approx \frac{1}{2}\left[9 + \frac{-3}{1} + 2(4 + \frac{-2}{2}) + 2(1 + \frac{-1}{3}) + 2(0 + \frac{0}{4}) + 1 + \frac{1}{5}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[6 + 6 + \frac{4}{3} + 1 + \frac{1}{5}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[13 + \frac{20}{15} + \frac{3}{15}\right] \\
&= \frac{109}{15}.
\end{aligned}$$

Der absolute Fehler liegt bei $|6{,}8956 - \frac{109}{15}| \approx 0,37$.

b) Es genüg die Exaktheit für Monome vom Grad ≤ 1 zu fordern, also der Gleichung

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx = af(-3) + 2f(0) + \tfrac{1}{2}f(b) + R(f).$$

Setzt man dort die Monome x^0, x^1 ein, führt dies zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
4 &= a + 2 + \frac{1}{2} \\
-4 &= -3a + \frac{1}{2}b,
\end{aligned}$$

woraus direkt die Lösung $a = 1{,}5$ und $b = 1$ folgt. Dies führt uns zu der Formel

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx = \frac{3}{2}f(-3) + 2f(0) + \tfrac{1}{2}f(\frac{1}{2}) + R(f).$$

Als Näherung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{1} x^2 + \frac{x}{x+4} dx &\approx \frac{3}{2}(9 + \frac{-3}{1}) + 2(0) + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{5}) \\
&= \frac{48}{5} \approx 9.6.
\end{aligned}$$

Der absolute Fehler beträgt ungefähr 2,7044.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Gegeben sei die Verfahrensfunktion

$$\Phi(x,y,h) = \tfrac{1}{2}f(x,y) + \tfrac{1}{2}f(x+\tfrac{1}{2}h, y+\tfrac{1}{2}hf(x,y)).$$

Sei $z(t)$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t,z(t)),\\ z(x) &= y. \end{aligned}$$

Konsistenzordnung 1 bedeutet nun, dass

$$\begin{aligned} \theta(x,y,h) &= \Delta(x,y,h) - \Phi(x,y,h) = \frac{z(x+h)-y}{h} - \Phi(x,y,h)\\ &= \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

gilt. Die Taylorentwicklungen von f und z ergeben

$$\begin{aligned} f(x+\tfrac{h}{2}, y+\tfrac{h}{2}f(x,y)) &= f(x,y) + \mathcal{O}(h^1)\\ z(x+h) &= z(x) + hz'(x) + \mathcal{O}(h^2)\\ &= y + hf(x,y) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \theta(x,y,h) &= \frac{z(x+h)-y}{h} - \Phi(x,y,h)\\ &= \frac{y+hf(x,y)+\mathcal{O}(h^2)-y}{h} - \frac{1}{2}[f(x,y)+f(x,y)+\mathcal{O}(h)]\\ &= \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

b) Das Euler-Verfahren lautet $y^{i+1} = y^i + hf(x^i, y^i)$. Mit der Schrittweite $h = \frac{2}{3}$ erhalten wir die Stützstellen $x^0 = 0, x^1 = \frac{2}{3}, x^2 = \frac{4}{3}, x^3 = 2$. Dies liefert

$$\begin{aligned} y^1 &= y^0 + \frac{2}{3}\frac{x^0+y^0}{y^0} = 2 + \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{8}{3}\\ y^2 &= \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\frac{\frac{2}{3}+\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\\ y^3 &= \frac{7}{2} + \frac{2}{3}\frac{\frac{4}{3}+\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{557}{126} \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

a) Die Ableitung der Funktion

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x + \frac{y^2}{4} \\ x + \frac{y}{4} \end{pmatrix}$$

lautet

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}y \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

mit $\det DF = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}y$. Also lautet die Inverse von DF

$$DF^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}y \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}y}.$$

Der Startvektor $(0,\frac{1}{2})$ ist nicht geeignet, da $\det DF(0,\frac{1}{2}) = 0$. Also ist DF nicht invertierbar.

b) Das Newton-Verfahren ergibt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - DF^{-1}(x_k, y_k) F(x_k, y_k) \\
&= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} y_k} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} y_k \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k + \frac{y_k^2}{4} \\ x_k + \frac{y_k}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der erste Schritt zum Startvektor $(1, 0)$ lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$