Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math.techn. Rainer Mandel

SS 2009

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Ingenieurwesen: Übungklausur 10.07.2009

Aufgabe 1:

a) Geben Sie die Definition einer reellen elementaren hermiteschen Matrix (= Householder-Matrix) in n Dimensionen an und weisen Sie nach, dass jede reelle elementare hermitesche Matrix symmetrisch und orthogonal ist.

b) Führen Sie jeweils einen Schritt der $LR-$Zerlegung und einen Schritt der $QR-$Zerlegung für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

durch. Geben Sie die gewonnenen Matrizen L_1, R_1 mit $L_1 A = R_1$ sowie Q_1, A_1 mit $Q_1 A = A_1$ an.

c) Gegeben sei eine $QR-$Zerlegung $A = QR$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Formulieren Sie in Pseudo-Code einen Algorithmus, der im Falle der eindeutigen Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ dessen Lösung berechnet und sonst eine Fehlermeldung ausgibt.

Aufgabe 2:

Lösen Sie die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\text{Maximiere} \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad \text{unter den Nebenbedingungen}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq -2 \\ x_2 + x_4 \leq 7 \\ -x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_1 \leq 2;\ x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie $\mathrm{cond}_\infty(A)$ für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 10 & 100 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft, dass gilt:

$$\mathrm{cond}_\infty(DA) = \min\{\mathrm{cond}_\infty(\tilde{D}A) \ : \ \tilde{D} \text{ Diagonalmatrix}\}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{cond}_\infty(DA)$.

Hinweis: Die Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist die "Zeilensummennorm".

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \cos(x) + 2x - 0.5$ auf $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ genau eine Nullstelle x^* besitzt.

b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung dieser Nullstelle und berechnen Sie die erste Iterierte zum Startwert $x^0 = 0$.

c) Berechnen Sie eine Konstante C mit

$$|x^k - x^*| \leq C \cdot |x^{k-1} - x^*|^2 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

d) Formulieren Sie eine Bedingung an den Startwert x^0, so dass

$$|x^k - x^*| \leq L^k \cdot |x^0 - x^*| \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und ein $L < 1$ gilt. Weisen Sie in diesem Falle die Konvergenz des Newton-Verfahrens nach.

e) Konvergiert das Verfahren für $x^0 = 0$?

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel zu den drei Schrittweiten $h = 1$, $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{3}$ Näherungen an die Zahl $\ln(2)$.

b) Wie groß muss $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden, um mit der zusammengesetzten Trapezregel zur Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ eine Approximation bis auf einen Fehler $\leq 10^{-4}$ zu errreichen?

Hinweis: $\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} \, dt$