Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Übungsblatt 3

Cholesky-Zerlegung einer positiv definiten, hermiteschen Matrix

Für eine positv definite, hermitesche Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ kann der Gauß-Algorithmus "symmetrisch" durchgeführt werden. Wir erhalten dadurch eine Zerlegung in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix L mit ihrer konjugiert-transponierten, die sogenannte Cholesky-Zerlegung

$$A = LL^H.$$

Komponentenweise heißt das zunächst:

$$a_{ik} = \sum_{\mu=1}^{m} l_{i\mu}\overline{l_{k\mu}} \quad (i,k = 1,\dots,m),$$

wobei mit l_{ik} $(i = 1,\dots,m,\ k = 1,\dots,i)$ die Einträge der Matrix L bezeichnet werden. Wegen der Dreieicksgestalt von L ergibt sich schließlich:

$$a_{ik} = \sum_{\mu=1}^{\min\{i,k\}} l_{i\mu}\overline{l_{k\mu}} \quad (i,k = 1,\dots,m).$$

Dies liefert den folgenden Algorithmus zur Berechnung einer Cholesky-Zerlegung (siehe Vorlesung):

Für $i = 1,\dots,m$:

1. *Für $k = 1,\dots,i-1$ berechne*

$$l_{ik} := \frac{1}{l_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{\mu=1}^{k-1} l_{i\mu}\overline{l_{k\mu}}\right).$$

2. *Berechne*

$$l_{ii} := \sqrt{a_{ii} - \sum_{\mu=1}^{i-1} |l_{i\mu}|^2}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (Matlab, Cholesky-Zerlegung)**:**

(i) Schreiben Sie auf der Grundlage des obigen Algorithmus ein Programm das zu einer gegebenen positiv definiten, hermitschen Matrix A eine Cholesky-Zerlegung berechnet.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihres Programms aus (i) eine Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -15 & 3 \\ 6 & 5 & -12 & 2 \\ -15 & -12 & 45 & -13 \\ 3 & 2 & -13 & 6 \end{pmatrix}.$$

(iii) Schreiben Sie ein weiteres Programm zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, das auf Ihr Programm aus (i) zurückgreift.

(iv) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit A aus (ii) und

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

numerisch mit Hilfe Ihres Programms aus (iii).

Aufgabe 6 (von-Mises Iteration)**:**
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die ersten drei Schritte der von-Mises Iteration mit dem Startvektor $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ und geben Sie eine grobe Näherung für den größten Eigenwert von A an.

Die Aufgaben werden in der Übung am 19.05.2016 besprochen.