Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Übungsblatt 4

Das LR-Verfahren für Eigenwertprobleme

Für die Matrix $A =: A_1$ seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1. A sei diagonalisierbar, d.h. es gebe eine Matrix T mit
$$A = T\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)T^{-1},$$
wobei für T und T^{-1} LR-Zerlegungen (ohne Zeilenvertauschungen) existieren mögen.
2. Die Eigenwerte von A lassen sich betragsmäßig ordnen:
$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_m| > 0.$$
3. Das LR-Verfahren (ohne Zeilenvertauschungen)
$$A_k =: L_k R_k, \quad A_{k+1} := R_k L_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$
sei durchführbar, d.h in jedem Schritt k möge eine LR-Zerlegung der Matrix A_k existieren.

Dann gilt (was hier nicht bewiesen werden soll):

(i)
$$\lim_{k\to\infty} R_k = \lim_{k\to\infty} A_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

(ii) $\lim_{k\to\infty} L_k = E.$

Bitte wenden!

Aufgabe 7 (Matlab, LR-Verfahren für Eigenwertprobleme):

(i) Schreiben Sie ein Programm welches das oben beschriebene LR-Verfahren für Eigenwertprobleme numerisch realisiert. Verwenden Sie hierfür ein Programm für eine LR-Zerlegung analog zu Aufgabe 4, aber ohne Pivotisierung. Brechen Sie die Iteration ab, wenn alle Einträge der Matrix L_k unterhalb der Diagonalen betragsmäßig unterhalb einer gewissen Toleranz ε liegen, d.h. falls

$$\max \left\{ \left| \left(L_k\right)_{ij} \right| : i = 2, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, i-1 \right\} < \varepsilon$$

erfüllt ist.

(ii) Berechnen Sie nun mit Ihrem Programm approximative Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -7 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 (Inverse Iteration von Wieland):
Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

sowie eine grobe Approximation $\tilde{\lambda} = 3$ an den zweiten Eigenwert von B. Berechnen Sie mit Hilfe der Inversen Iteration von Wieland eine verbesserte Approximation $\tilde{\lambda}_2$ für den zweiten Eigenwert (vgl. Skript S. 34: Praktischer Nutzen der inversen Iteration). Verwenden Sie den Startvektor $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ und führen Sie drei Iterationsschritte durch.
Hinweis: Sie dürfen hier zum Lösen der auftretenden linearen Gleichungssysteme geeignete Hilfsmittel verwenden, z.B. den Matlab-Befehl $A \backslash b$ zum Lösen linearer Gleichungssysteme.

Aufgabe 9 (Simplex-Algorithmus):
Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 6x_2 - 40$ mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 2x_1 & +6x_2 \geq -80 \\ -x_1 & -8x_2 \geq 0 \\ -3x_1 & +10x_2 \leq -230 \end{cases}, \quad x_1 \leq 50, \quad 2x_2 \geq -20.$$

(i) Bringen Sie das obige Problem zunächst auf Normalform indem Sie die Transformation

$$x_1 = 50 - \tilde{x}_1, \quad x_2 = \frac{1}{2}\tilde{x}_2 - 10$$

verwenden, d.h. bestimmen Sie eine Funktion $\tilde{Z}$ mit $\tilde{Z}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = Z(x_1, x_2)$ und schreiben Sie die Nebenbedingungen mit Hilfe der Transformation um.

(ii) Berechnen Sie nun mit Hilfe des Simplex-Algorithmus eine optimale Basislösung für die Zielfunktion $\tilde{Z}$ unter den transformierten Nebenbedingungen aus (i).

(iii) Führen Sie nun die entsprechende Rücktransformation aus und geben Sie eine optimale Basislösung für die Zielfunktion Z an. Berechnen Sie außerdem den optimalen Wert von Z.

Die Aufgaben werden in der Übung am 02.06.2016 besprochen.