

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Übungsblatt 5

Klausuranmeldung:

Die Klausur zur Vorlesung findet am Donnerstag, den **01.09.2016** von **8:00-10:00 Uhr** statt. Ab dem **01.06.2016** können Sie sich online für die Klausur anmelden. Anmeldeschluss ist der **15.08.2016**.

Aufgabe 10 (2-Phasen-Methode, Simplex-Algorithmus):

Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$ mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 16 \\ -x_1 - x_2 \leq -4 \\ -3x_1 - x_2 \leq -6 \\ -2x_1 + x_2 \geq -16 \end{cases}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Verwenden Sie die 2-Phasen-Methode um dieses lineare Optimierungsproblem zu lösen.

- (i) *1.Phase*: Berechnen Sie zunächst eine zulässige Basislösung für das gegebene Problem.
- (ii) *2.Phase*: Bestimmen Sie ausgehend von dieser Lösung eine optimale Basislösung für die Zielfunktion Z und geben Sie außerdem den optimalen Wert an.

Aufgabe 11 (Konditionszahl):

- (i) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

die Konditionszahl bezüglich der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ und der Spaltensummennorm $\|\cdot\|_1$, d.h. berechnen Sie $\text{cond}_\infty(A)$ und $\text{cond}_1(A)$.

Hinweis: Für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ lässt sich die der jeweiligen Norm $\|\cdot\|_\infty$, bzw. $\|\cdot\|_1$ zugeordnete Matrixnorm folgend berechnen:

$$\|B\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |b_{ij}|, \quad \text{bzw.} \quad \|B\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |b_{ij}|.$$

(Können Sie das beweisen?)

Bitte wenden!

- (ii) Bestimmen Sie Diagonalmatrizen D_∞ , bzw. D_1 , sodass die Betragssummen aller Zeilen von $D_\infty A$, bzw. aller Spalten von AD_1 den Wert 1 haben und berechnen Sie die Konditionszahlen der Matrizen $D_\infty A$ und AD_1 .
- (iii) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit A aus (i). Weiter sei Δb eine Störung der rechten Seite. Wie groß ist der relative Fehler der Lösung bezüglich der Spaltensummennorm höchstens, wenn der relative Fehler der Störung Δb höchstens 10^{-4} beträgt?
- (iv) Betrachten Sie nun das vorkonditionierte Gleichungssystem $AD_1 y = b$ mit $y := D_1^{-1}x$ und berechnen Sie analog zu Aufgabe (iii) eine Schranke für den relativen Fehler der Lösung y bezüglich der Spaltensummennorm, wenn der relative Fehler der Störung wieder höchstens 10^{-4} beträgt. Was fällt Ihnen auf?

Die Aufgaben werden in der Übung am 16.06.2016 besprochen.