Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Übungsblatt 6

Aufgabe 12 (Newton-Verfahren)**:**
Gegeben sei die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \log(x) + 0{,}5x - 2 \quad (x \in (0,\infty)),$$

wobei $\log(\cdot)$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle x^* in $(2,3)$ besitzt. Gibt es noch weitere Nullstellen?

(ii) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f.

(iii) Führen Sie die ersten drei Iterationen zum Startwert $x^{(0)} = 2{,}9$ durch und geben Sie eine approximative Nullstelle von f in $(2,3)$ an.

(iv) Bestimmen Sie anhand von Satz 5.1 im Skript eine Konstante η, sodass die Ungleichung

$$\left|x^* - x^{(k+1)}\right| \le \eta \left|x^* - x^{(k)}\right|^2$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x^{(k)} \in (x^* - 1, x^* + 1)$ erfüllt ist und zeigen Sie:

$$x^{(k)} \in (x^* - 1, x^* + 1) \;\Rightarrow\; x^{(k+1)} \in (x^* - 1, x^* + 1).$$

(v) Für welche Startwerte $x^{(0)} \in (2,3)$ konvergiert das Newton-Verfahren?

Aufgabe 13 (Newton-Verfahren, Matlab)**:**

(i) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer auf $D \subset \mathbb{R}^m$ differenzierbaren Funktion $F\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

(ii) Gegeben sei die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} -{x_1}^2 + x_2 \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Ableitung von F. Warum ist der Vektor $(1, -\frac{1}{2})^T$ nicht als Startvektor geeignet?

(iii) Schreiben Sie ein Matlab-Programm das für eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ das Newton-Verfahren numerisch realisiert. Das Verfahren soll abbrechen, sobald $\left\|F(x^{(k)})\right\|_2$ unterhalb einer gewissen Toleranz ε liegt, d.h. wenn $\left\|F(x^{(k)})\right\|_2 < \varepsilon$ erfüllt ist.

(iv) Berechnen Sie mit Ihrem Programm aus (iii) approximative Nullstellen für die Funktion aus Aufgabe 12. Verwenden Sie die Toleranz $\varepsilon = 10^{-10}$.

(v) Bestimmen Sie mit Ihrem Programm aus (iii) eine approximative Nullstelle von F. Verwenden Sie dafür den Startvektor $(1,1)^T$ und die Toleranz $\varepsilon = 10^{-10}$.

Aufgabe 14 (Quadratur)**:**
Gegeben seien die Integrale

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\; dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 (4x^3 - 2x + \frac{1}{2}e^x)\; dx.$$

(i) Bestimmen Sie für die obigen Integrale den exakten Wert.

(ii) Geben Sie eine obere Schranke des Quadraturfehlers der Trapezregel für die obigen Integrale an.

(iii) Berechnen Sie für die Integrale einen Näherungswert unter Verwendung der Trapezregel und geben Sie den tatsächlichen absoluten Fehler an.

(iv) Zeigen Sie, dass für den Quadraturfehler der zusammengesetzten Trapezregel zur Intervalllänge $h = \frac{b-a}{N}$ die Fehlerdarstellung

$$R_Z(f) = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\eta) \quad \text{mit einem } \eta \in [a,b]$$

gilt, falls f zweimal stetig differenzierbar auf $[a,b]$ ist.

(v) Wiederholen Sie die Schritte (ii) und (iii) mit der zusammengesetzten Trapezregel zur Intervalllänge $h = \frac{1}{2}$.

Die Aufgaben werden in der Übung am 30.06.2016 besprochen.