Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Übungsblatt 7

Aufgabe 15 (Quadratur)**:**
Zeigen Sie, dass die Quadraturformel

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{q=0}^{n} \alpha_q f(x_q) + R(f)$$

mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ und dem Quadraturfehler $R(f)$ genau dann für alle Polynome vom Grad $\leq m$ exakt ist, wenn sie für die Monome $p_0, \ldots, p_m$ exakt ist.
Hinweis: Das Monom p_k ist gegeben durch $p_k(x) = x^k$.

Aufgabe 16 (Quadratur)**:**
Gegeben sei das Integral

$$\int_2^6 \frac{1}{x \ln(x)}\ dx, \tag{$*$}$$

dessen exakter Wert $\ln(\ln 6) - \ln(\ln 2) \approx 0{,}95$ beträgt.

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Sehnentrapezregel zur Schrittweite $h = 1$ eine Näherung für das gegebene Integral und geben Sie den absoluten Fehler an.

(ii) Gegeben sei die Quadraturformel

$$\int_2^6 f(x)\ dx = \alpha_0 f(2) + \alpha_1 f(4) + \alpha_2 f(6) + R(f)$$

mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. $R(f)$ bezeichne den Fehler der Quadratur. Bestimmen Sie die Konstanten α_0, α_1 und α_2 so, dass die Quadraturformel für Polynome vom Grad ≤ 2 exakt ist und berechnen Sie damit eine Näherung für das Integral $(*)$. Geben Sie außerdem den absoluten Fehler an.

Aufgabe 17 (Anfangswertproblem)**:**
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 1 - t^2 y(t), \quad y(0) = 0. \tag{$**$}$$

(i) Formulieren Sie für das Anfangswertproblem $(**)$ das Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie damit eine Näherung für $y(1)$.

(ii) Formulieren Sie für das Anfangswertproblem $(**)$ das 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit $\beta = \frac{1}{2}$ zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie damit eine Näherung für $y(1)$.

Aufgabe 18 (Anfangswertproblem, Matlab)**:**

(i) Stellen Sie die Verfahrensfunktion für das klassische Runge-Kutta-Verfahren (siehe S. 95 im Skript) auf.

(ii) Schreiben Sie ein Matlab-Programm welches das klassische Runge-Kutta Verfahren numerisch umsetzt. Dabei soll das Verfahren nach Schritt $i_{\max}$ abbrechen, wenn eine bestimmte vorgegebene Stelle $x_{\max}$ erreicht wurde, d.h. wenn $x^{(i_{\max})} \geq x_{\max}$ erfüllt ist.

(iii) Berechnen Sie mit Ihrem Programm aus (ii) für das Anfangswertproblem ($**$) aus Aufgabe 17 jeweils Näherungen für $y(1)$ zu den Schrittweiten $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$.

(iv) Berechnen Sie mit ihrem Programm aus (ii) für das Anfangswertproblem ($**$) aus Aufgabe 17 jeweils eine Näherung auf dem Intervall $[0, 5]$ mit den Schrittweiten $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ und stellen Sie diese grafisch dar. Was fällt Ihnen auf?

Die Aufgaben werden in der Übung am 14.07.2016 besprochen.