Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Numerische Methoden - Sommersemester 2016

Übungsblatt 8

Aufgabe 19 (Konsistenzordung)**:**
Zeigen Sie, dass das allgemeine 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\Phi(x,y,h) = (1-\beta)f(x,y) + \beta f\big(x + \frac{h}{2\beta}, y + \frac{h}{2\beta}f(x,y)\big)$$

mit $\beta \neq 0$ Konsistenzordnung 2 hat.

Aufgabe 20 (Anfangswertproblem)**:**

(i) Führen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) = 6e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

2-ter Ordnung auf ein System erster Ordnung zurück.

(ii) Formulieren Sie für das System aus (i) das Verfahren von Heun (2-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit $\beta = \frac{1}{2}$) zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie damit eine Näherung für $y(1)$.

Aufgabe 21 (Randwertproblem)**:**

(i) Zeigen Sie, dass für eine C^3-Funktion y die Gleichung

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

für $h \to 0$ gilt. Dies wird auch als zentraler Differenzenquotient bezeichnet.

(ii) Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-y'' + 2y' - \pi^2 y = f \text{ auf } (0,2), \quad y(0) = 0, \; y(2) = 2$$

mit $f(x) = 2\pi\cos(\pi x) - 1 + 2x - \frac{\pi^2}{2}x^2$ ($x \in \mathbb{R}$). Leiten Sie das lineare Gleichungssystem her, das man erhält, wenn man das Randwertproblem mit Hilfe zweiter Differenzen und des zentralen Differenzenquotionen aus (i) zur Schrittweite h diskretisiert, wobei h stets so gewählt sei, dass $\frac{2}{h} =: N \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das zu vorgegebener Schrittweite h das lineare Gleichungssystem aus (ii) löst und die Näherung grafisch darstellt.

(iv) Starten Sie Ihr Programm aus (ii) mit den Schrittweiten $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ und vergleichen Sie die einzelnen Näherungen untereinander, sowie mit der exakten Lösung $y(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}x^2$.

Die Aufgaben werden in der Übung am 21.07.2016 besprochen.