Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Numerische Methoden Sommersemester 2016

01.09.2016

Aufgabe 1 (4 Punkte)**:**
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit normierter Diagonale sowie eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = LR$ gilt.

(ii) Lösen Sie mit Hilfe der in Teil (i) berechneten Matrizen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(iii) Es ist $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{11}{5}$ (Dies brauchen Sie nicht zu beweisen). Berechnen Sie $\operatorname{cond}_\infty(A)$. Weiter sei $\Delta b = (\frac{1}{121}, \frac{1}{150}, -\frac{1}{200})^T$ eine Störung der rechten Seite. Wie groß ist der relative Fehler der Lösung bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm höchstens?

Lösung:

(i) Die LR-Zerlegung ohne Pivotisierung liefert in den einzelnen Schritten die folgenden Matrizen:

$$A^{(1)} := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(2)} := L_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} := L_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man schließlich die Matrizen $R := A^{(3)}$, sowie

$$L := {L_1}^{-1}{L_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Mit der Variable $y := Rx$ löst man zunächst das lineare Gleichungssystem $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen. Man erhält als Lösung $y = (1, 3, -5)^T$. Nun muss noch das lineare Gleichungssystem $Rx = y$ mittels Rückwärtseinsetzen gelöst werden. Somit ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ durch $x = (0, 1, -1)$ gegeben.

(iii) Es gilt $\|A\|_\infty = 11$, $\|b\|_\infty = 5$ und $\|\Delta b\|_\infty = \frac{1}{121}$. Damit berechnet man $\operatorname{cond}_\infty(A) = 11 \cdot \frac{11}{5} = \frac{121}{5}$. Mit der Formel aus der Vorlesung erhält man

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \operatorname{cond}_\infty(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{121}{5} \cdot \frac{1}{121} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**:**
Gegeben seien die Matrix A sowie deren Inverse A^{-1} durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2, \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A lauten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$.

(i) Bestimmen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_1(A)$ der Matrix A.

(ii) Führen Sie die ersten drei Schritte der von-Mises Iteration mit der Matrix A und dem Startvektor $x^{(0)} = (1,0)^T$ durch und geben Sie die im dritten Schritt berechnete Näherung und den absoluten Fehler für den approximierten Eigenwert an.

(iii) Führen Sie die ersten zwei Schritte der inversen Iteration von Wielandt (mit Grobnäherung $\tilde{\lambda} = 0$) mit dem Startvektor $x^{(0)} = (1,0)^T$ durch und geben Sie den so berechneten approximativen Eigenwert, sowie den absoluten Fehler nach dem zweiten Schritt an.

(iv) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion die zu einer gegebenen Matrix A und einem Startvektor x die ersten N Schritte der inversen Iteration von Wielandt (für $\tilde{\lambda} = 0$) durchführt, ohne die Inverse von A explizit zu berechnen, und eine Approximation an den betragsmäßig kleinsten Eigenwert als Rückgabewert liefert.
Hinweis: Gehen Sie ohne Überprüfung davon aus, dass A als quadratische Matrix und x als Vektor passender Dimension korrekt eingelesen sind. Sie dürfen außerdem eine Funktion `[k]=argmax(x)`, welche zu einem vorgegebenen Vektor x den Index k des betragsgrößten Elements des Vektors ausgibt, und eine Funktion `[x]=A\b`, die zu einer Matrix A und einem Vektor b das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst, verwenden.

Lösung:

(i) Es gilt

$$\text{cond}_1(A) = \underbrace{\|A\|_1}_{=3} \underbrace{\left\|A^{-1}\right\|_1}_{=1} = 3.$$

(ii) Die ersten drei Schritte der von-Mises Iteration liefern die folgenden Ergebnisse:

$$z^{(1)} := Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = 1, \quad x^{(1)} := \frac{z^{(1)}}{z^{(1)}_{i_1}} = \frac{z^{(1)}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
$$z^{(2)} := Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \quad i_2 = 1, \quad x^{(2)} := \frac{z^{(2)}}{z^{(2)}_{i_2}} = \frac{z^{(2)}}{\frac{5}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix},$$
$$z^{(3)} := Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}, \quad i_3 = 1, \quad x^{(3)} := \frac{z^{(3)}}{z^{(3)}_{i_3}} = \frac{z^{(3)}}{\frac{14}{5}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{13}{14} \end{pmatrix}.$$

Mit dem Index $i_2 = 1$ erhält man als Approximation für den betragsmäßig größten Eigenwert im dritten Schritt $\tilde{\lambda}_1 = \frac{14}{5} = 2{,}8$. Der absolute Fehler beträgt somit $\left|3 - \frac{14}{5}\right| = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

(iii) Die ersten beiden Schritte der inversen Iteration von Wieland ergeben

$$z^{(1)} := A^{-1}x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad i_1 = 1, \quad x^{(1)} := \frac{z^{(1)}}{z^{(1)}_{i_1}} = \frac{z^{(1)}}{\frac{2}{3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
$$z^{(2)} := A^{-1}x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad i_2 = 1, \quad x^{(2)} := \frac{z^{(2)}}{z^{(2)}_{i_2}} = \frac{z^{(2)}}{\frac{5}{6}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Wegen $i_1 = 1$ ist $\frac{5}{6}$ eine Approximation an den Kehrwert des betragsmäßig kleinsten Eigenwertes. Es gilt also $\tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5} = 1{,}2$. Der absolute Fehler ist dann $\left|1 - \frac{6}{5}\right| = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

```
(iv) function z = wielandt(A,x,N)
       for i = 1:N
         z  = A\x;
         ik = argmax(z);
         if (i==N-1)
           k = ik;
         end
         x = z/z(ik);
       end
       z = 1/z(k);
     end
```

Aufgabe 3 (3 Punkte)**:**
Gegeben sei die Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 - 20$. Bestimmen Sie eine optimale Basislösung und geben Sie den maximalen Wert von Z an unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 8x_1 & -x_2 \geq 10 \\ 3x_1 & +5x_2 \leq 150 \\ x_1 & +7x_2 \leq 180 \end{cases} , \quad x_1 \leq 10, x_2 \geq 20.$$

Hinweis: Führen Sie zunächst eine geeignete Transformation der beiden Variablen durch.

Lösung:
Zunächst muss das Problem auf Normalform gebracht werden. Die Transformation $\tilde{x}_1 := 10 - x_1$ und $\tilde{x}_2 := x_2 - 20$ liefert das lineare Optimierungsproblem: Maximieren Sie die Zielfunktion

$$\tilde{Z}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 - 90$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} 8\tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 \leq 50 \\ -3\tilde{x}_1 & +5\tilde{x}_2 \leq 20 \\ -\tilde{x}_1 & +7\tilde{x}_2 \leq 30 \end{cases} , \quad \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0.$$

Das Ausgangstableau für dieses Problem lautet:

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	
y_1	$\boxed{8}$	1	1	0	0	50
y_2	-3	5	0	1	0	20
y_3	-1	7	0	0	1	30
	-3	2	0	0	0	-90

.

Der Simplex-Algorithmus liefert im ersten Schritt das Tableau:

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y_1	y_2	y_3	
$\tilde{x}_1$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{25}{4}$
y_2	0	$\frac{43}{8}$	$\frac{3}{8}$	1	0	$\frac{155}{4}$
y_3	0	$\frac{57}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	1	$\frac{145}{4}$
	0	$\frac{19}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	0	$-\frac{285}{4}$

.

Da in der Zielfunktionszeile nur noch positive Einträge stehen, ist der Algorithmus hier beendet und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\frac{25}{4}, 0)$ ist eine optimale Basislösung für $\tilde{Z}$.

Rücktransformation liefert die optimale Basislösung $(x_1, x_2) = (\frac{15}{4}, 20)$ und den optimalen Wert $Z(\frac{15}{4}, 20) = -\frac{285}{4} = -71{,}25$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei das Integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^2+1}\, dx, \tag{$*$}$$

dessen exakter Wert $3 - \arctan(2) + \arctan(-1) \approx 1{,}11$ beträgt (Dies brauchen Sie nicht zu beweisen).

(i) Formulieren Sie die Simpson-Regel und verwenden Sie diese um eine Näherung für das obige Integral zu berechnen. Geben Sie außerdem den absoluten Fehler an.

(ii) Gegeben sei die Quadraturformel

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \alpha_1 f(-1) + f(0) + \alpha_2 f(1) + f(2) + R(f)$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. $R(f)$ bezeichne den Fehler der Quadratur. Bestimmen Sie die Konstanten α_1 und α_2 so, dass die Quadraturformel für Polynome vom Grad ≤ 1 exakt ist. Berechnen Sie damit eine Näherung für das Integral $(*)$ und geben Sie den absoluten Fehler an.

Lösung:

(i) Die Simpson-Regel lautet

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R_{\mathrm{S}}(f).$$

Damit berechnet man die folgende Approximation für das obige Integral:

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^2+1}\, dx \approx \frac{3}{6}\left[\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right] = \frac{21}{20} = 1{,}05.$$

Der absolute Fehler beträgt also $|1{,}11 - 1{,}05| = 0{,}06$.

(ii) Damit die Quadraturformel für Polynome von Grad ≤ 1 exakt ist, genügt es die Exaktheit für die Monome p_0 und p_1 zu fordern. Daraus erhält man das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 + 1 + \alpha_2 + 1 \\ \frac{3}{2} &= -\alpha_1 + 0 + \alpha_2 + 2 \end{aligned}$$

Lösen dieses Gleichungssystems liefert die Quadraturgewichte $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ und $\alpha_2 = \frac{1}{4}$.

Damit erhält man die folgende Approximation für obiges Integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^2+1}\, dx \approx \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{13}{10} = 1{,}3.$$

In diesem Fall ist der absolute Quadraturfehler also $|1{,}11 - 1{,}3| = 0{,}19$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**:**
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{6\sin(\pi t)}{1 + y(t)^2}, \quad y(0) = 0.$$

(i) Formulieren Sie für dieses Anfangswertproblem das Eulersche Polygonzugverfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ und berechnen Sie damit eine Näherung für $y(1)$.

(ii) Formulieren Sie für dieses Anfangswertproblem das 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit $\beta = \frac{1}{2}$ (Verfahren von Heun) zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie damit eine Näherung für $y(1)$.

Hinweis: Sie können die unten stehende Tabelle verwenden.

Lösung:

(i) Die Formel für das Eulersche Polygonzugverfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ für $f(t, y) = \frac{6\sin(\pi t)}{1+y^2}$ lautet:

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + \frac{1}{3} \cdot f(t^{(i)}, y^{(i)}) = y^{(i)} + \frac{2\sin(\pi t^{(i)})}{1 + {y^{(i)}}^2} \quad (i \geq 0),$$

wobei $t^{(i)} = \frac{i}{3}$ gilt und der Anfangswert durch $y^{(0)} = 0$ gegeben ist. Die ersten drei Schritte lauten damit:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= 0 + \frac{2 \cdot \sin(0)}{1 + 0^2} = 0, \\ y^{(2)} &= 0 + \frac{2 \cdot \sin(\frac{\pi}{3})}{1 + 0^2} = \sqrt{3}, \\ y^{(3)} &= \sqrt{3} + \frac{2 \cdot \sin(\frac{2\pi}{3})}{1 + \sqrt{3}^2} = \frac{5}{4}\sqrt{3} \end{aligned}$$

und die gesuchte Näherung für $y(1)$ ist somit $\frac{5}{4}\sqrt{3} \approx 2{,}1651$.

(ii) Die Formel für das Verfahren von Heun zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ lautet:

$$\begin{aligned} y^{(i+1)} &= y^{(i)} + \frac{1}{4}\left[f(t^{(i)}, y^{(i)}) + f\left(t^{(i)} + h, y^{(i)} + h \cdot f(t^{(i)}, y^{(i)})\right)\right] \\ &= y^{(i)} + \frac{1}{4}\left[\frac{6\sin(\pi t^{(i)})}{1 + {y^{(i)}}^2} + \frac{6\sin(\pi(t^{(i)} + \frac{1}{2}))}{1 + \left(y^{(i)} + \frac{1}{2}\frac{6\sin(\pi t^{(i)})}{1+{y^{(i)}}^2}\right)^2}\right] \quad (i \geq 0), \end{aligned}$$

wobei hier $t^{(i)} = \frac{i}{2}$ gilt und der Anfangswert durch $y^{(0)} = 0$ gegeben ist. Die ersten zwei Schritte lauten damit:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= 0 + \frac{1}{4}[0 + 6] = \frac{3}{2}, \\ y^{(2)} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\left[\frac{24}{13} + 0\right] = \frac{51}{26} \end{aligned}$$

und die gesuchte Näherung für $y(1)$ ist somit $\frac{51}{26} \approx 1{,}9615$.

Aufgabe 6 (2 Punkte)**:**
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sin(\pi x) - 0{,}5x$ $(x \in \mathbb{R})$. Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von f und führen Sie den ersten Newton-Schritt zum Startwert $x^{(0)} = 0{,}5$ durch.

Lösung:
Die Vorschrift für das Newton-Verfahren mit Startwert $x^{(0)}$ lautet

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{\sin(\pi x^{(k)}) - 0{,}5x^{(k)}}{\pi\cos(\pi x^{(k)}) - 0{,}5} \quad (k \geq 0),$$

Nach dem ersten Schritt ergibt sich mit dem Startwert $x^{(0)} = 0{,}5$ die Näherung $x^{(1)} = 2$.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**:**
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-y'' = f \text{ auf } (0, 2), \quad y(0) = 0,\ y(2) = 1$$

mit f aus Aufgabe 6. Leiten Sie das lineare Gleichungssystem her, welches man erhält, wenn man das Randwertproblem mit finiten Differenzen und Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ diskretisiert (Sie brauchen das Gleichungssystem nicht zu lösen).

Lösung:
Um die zweite Ableitung zu diskretisieren werden finite Differenzen verwendet:

$$y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2},$$

wobei $x_k = \frac{k}{2}$ $(0 \leq k \leq 4)$ gilt.

Mit den Näherungswerten $y_k \approx y(x_k)$ $(1 \leq k \leq 3)$ und den Randwerten $y_0 = y(x_0) = 0$ und $y_4 = y(x_4) = 1$ erhält man schließlich die Gleichungen

$$\frac{-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}}{h^2} = \sin(\pi x_k) - 0{,}5 x_k \quad (1 \leq k \leq 3),$$

also ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \sin(\pi) - \frac{1}{2} \\ \sin(\frac{3\pi}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{h^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Spezielle sin**- und** cos**-Werte:**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1